

$x$ に1又は0を与えた幾つかの場合を $x$ を含む一度のシミュレーションで確認できることを示している。シミュレーションの観点から写像 $\hat{R}$ の性質を述べる。

[定理2] 写像 $\hat{R}$ の合成写像も又、 $\hat{R}$ 表現可能である。

この定理は、合成写像においても写像の正則性および単純性が保存されることから導かれる。

[定理3] 写像 $\varphi$ を $\Sigma_n$ の自己写像とする。 $A \subseteq B$ であれば必ず $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ が成立し、逆に $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ であれば必ずそれらの原像について $A \subseteq B$ が成立するための必要十分条件は、 $\varphi$ が $\hat{R}$ 表現可能で、 $\hat{R}$ の論理関数 $r_j (j=1, \dots, n)$ が、

$$r_j = a_j \text{ 又は } \bar{a}_j \text{ ( } a_j \text{ は } A \text{ の成分)}$$

であり、且つ各 $r_j$ の独立変数が互いに異なることである。

(証明)  $A \subseteq B$ であれば $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ 、又、 $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ であれば $A \subseteq B$ が成立するとしよう。 $\varphi$ が正則になることは明らかである。 $\varphi$ がもし単純でなければ $D(A)$ の任意の要素 $D_i$ について、

$$\varphi_j(D_i) = 1(0) \text{ で } \varphi_j(A) = x$$

の場合が生じる。この場合 $j$ ビット目の要素だけが0(1)で、ほかは $\varphi_j(D_i)$ と同一成分をもつベクトルの原像が $A$ の領域に含まれることになり、 $\varphi_j(D_i) = 1(0)$ の仮定に矛盾する。従って、 $\varphi$ は単純でなければならない。すなわち、 $\varphi$ は $\hat{R}$ 表現可能である。そこで、 $\hat{R}(A) \subseteq \hat{R}(B)$ であれば $A \subseteq B$ であると仮定する。 $\hat{R}$ は正則であることと、 $D(\hat{R}(A))$ の要素の原像が必ず存在しすべて $A$ に含まれることから、 $A$ と $\hat{R}(A)$ の $x$ の成分数が一致し、それらの領域要素が1対1に対応していなければならない。次に、 $A$ と $\hat{R}(A)$ の $x$ でない成分を各々 $a_j, \bar{a}_j$ とすれば、 $r_j$ は $a_j$ だけの関数でなければならないことが帰納法によって証明することができるが、紙数の都合上説明は省略する。すなわち、

$$r_j = a_j \text{ 又は } \bar{a}_j$$

である。 $\hat{R}$ の $r_j$ 以外の論理関数についても同様である。更に、写像しても $x$ の成分数が変化しないことから $\hat{R}$ の論理関数で同一の独立変数をもつものは存在しない。

逆の十分性は明らかである。

(証明終)

定理3は、正則性と同時にその逆の関係が成立するための条件が非常にきびしいものであることを示している。不確定状態を含むシミュレーションを集合論を使って形式化し、理論的考察を試みた。シミュレーションの観点から、 $\hat{R}$ の性質と回路構造との関係について詳しい考察が必要である。

謝辞 最後に、有益な助言を頂いた当社録倉製作所研究部溝口徹夫研究員に感謝する。

#### 文 献

- (1) M.A. Breuer: "Recent development in the automated design and analysis of digital systems", Proc., IEEE, 60, 1, p.12 (1972).
- (2) 小島, 田中, 金田: "診断データの作成と圧縮", 信学論(D), 56-D, 4, p.250 (昭48-04).

(昭和50年9月11日受付)

UDC 005.72"73":681.325.6  
519.713.4:519.175

## ド・ブルインのグラフと故障検査容易な順序機械について

藤原 秀雄 樹下 行三

藤原秀雄, 樹下 行三: 正員 大阪大学工学部電子工学科  
On the de Bruijn Graph and Easily Testable Sequential Machines. By Hideo FUJIWARA and Kozo KINOSHITA, Regular Members (Faculty of Engineering, Osaka University, Suita-shi, 565 Japan).

論文番号: 昭51-260(D-61)

順序機械の故障検査の問題を順序機械の識別問題の応用として取扱う方法に、状態遷移を検査する方法(Transition Checking Approach)がある<sup>(1)</sup>。この検査方式の立場で、著者らは前に、故障検査容易な順序機械を定義し、新しく2個の入力記号を付加することにより任意の順序機械をこの故障検査容易な順序機械に拡大する方法を示し、その故障検査系列の構成法について報告した<sup>(2),(3)</sup>。本稿では、求まる検査系列の長さのオーダは同じであるが、更に短い検査系列が得られる故障検査容易な順序機械を考察する。

故障検査容易な順序機械とは、短い検査系列を簡単な操作で求めることができるような順序機械であると考えられる。このためには、短いDS(Distinguishing Sequence: 出力応答から初期状態を決定できる入力系列)、短い遷移系列が存在することが必要である。従って、これらの性質を持つ順序機械として次に故障検査容易な順序機械を定義する。  
“故障検査容易な”順序機械とは、次の性質を満足する順序機械をいう。

(1)長さ $\lceil \log_2 n \rceil$ のDSが存在する。(2)任意の状態から任意の状態へ長さ $\lceil \log_2 n \rceil$ 以下の入力系列で遷移させることができる。但し、 $n$ は状態数、 $\lceil x \rceil$ は $x$ より小さくない最小整数。

順序機械に2個の入力記号 $\epsilon_0, \epsilon_1$ を付加して順序機械を拡大することは、図1のように、基の機械の状態遷移表に入力 $\epsilon_0, \epsilon_1$ の2列を加え、その部分の状態遷移と出力を決定することである。換言すれば、基の順序機械に2個の入力記号からなる2列順序機械を付加することになる。文献(2)、(3)では2値シフトレジスタに同形な2列順序機械(図3のA形)を付加することにより任意の順序機械を“故障検査容易な”順序機械に拡大できることを示した。2値 $p$ 段シフトレジスタの状態グラフは、節点や枝に付けられたラベルを無視すれば次数 $p$ のド・ブルイングラフ<sup>(4)</sup>に同形である。図2は次数2のド・ブルイングラフである。

本稿では、ド・ブルイングラフに同形な、もう1つの形(図3のB形)の2列順序機械を考察する。B形の2列順序

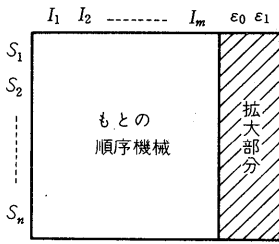


図1 拡大順序機械  
Fig.1-Augmented machine.

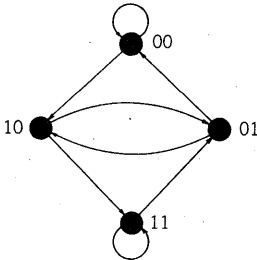


図2 次数2のド・ブリュイングラフ  
Fig.2-The de bruijn graph of order 2.

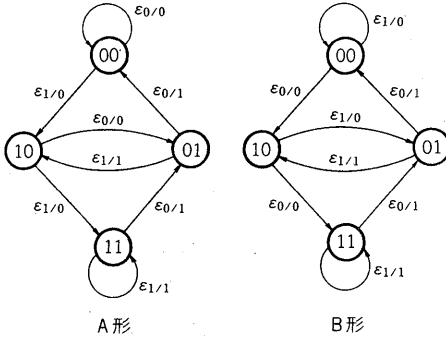


図3 拡大部分機械  
Fig.3-Augmented submachine.

機械(状態数  $2^p$ )は、状態グラフが  $p$  次ド・ブリュイングラフに同形で、入力  $\epsilon_0$  による状態遷移はすべての状態をただ一度通るサイクルを形成し、残りの枝による遷移は入力  $\epsilon_1$  による状態遷移とし、出力関数はA形<sup>(2),(3)</sup>と同じである。 $p=2$ の場合、A形、B形の各状態グラフは図3のようになる。従ってA形同様、B形の順序機械において、(1)入力系列  $\epsilon_0^p$  はDSであり、(2)任意の状態から任意の状態へ  $\epsilon_0$  と  $\epsilon_1$  だけから成る長さ  $p$  以下の入力系列により遷移でき、“故障検査容易”である。ここで  $p = \lceil \log_2 n \rceil$ 。

B形の拡大機械の検査系列の長さのオーダーはA形と同じく  $m \lceil \log_2 n \rceil$  であるが( $m$ は入力記号数)、A形より短い検査系列を求められることを次に示そう。以下の議論より、ド・ブリュイングラフに同形な2列順序機械の中では、おそらくB

形が最適であると思われる。拡大順序機械の検査系列は次の2つの部分から構成される<sup>(2),(3)</sup>。

〔 $\alpha$ -系列〕長さ  $\lceil \log_2 n \rceil$  の入力系列  $\epsilon_0^{\lceil \log_2 n \rceil}$  がDSであることを確認し、入力  $\epsilon_0, \epsilon_1$  による状態遷移と出力が正しいことを調べる系列。

〔 $\beta$ -系列〕 $\alpha$ -系列により確認された系列を用い、拡大前の順序機械の状態遷移と出力を調べる系列。

$\beta$ -系列はA形もB形もほぼ同じものが得られるので、以下ではA形とB形とで系列長に差が現れる  $\alpha$ -系列にだけ注目する。

入力系列  $\epsilon_0^{\lceil \log_2 n \rceil}$  がDSであることを確認するには各状態  $S_i$  に入力系列  $\epsilon_0^{\lceil \log_2 n \rceil}$  を加えればよい。更に、入力  $\epsilon_0, \epsilon_1$  による状態遷移が正しいことを調べるには、各状態  $S_i$  の入力  $\epsilon_0, \epsilon_1$  による遷移のあとにDSを加えればよい。従って、 $\alpha$ -系列は次の系列を部分系列に含む系列である。

$$(1) S_i \begin{matrix} \epsilon_0^{\lceil \log_2 n \rceil} \\ \epsilon_0 \epsilon_0 \dots \epsilon_0 \end{matrix}, (2) S_i \begin{matrix} \epsilon_1^{\lceil \log_2 n \rceil} \\ \epsilon_1 \epsilon_1 \dots \epsilon_1 \end{matrix} \quad (1 \leq i \leq n)$$

$\alpha$ -系列の長さを短くするには、(1)と(2)の各系列の重なりをできるだけ多くすればよい。A形とB形の順序機械を比較すると、A形では(1)の各系列  $\epsilon_0^{\lceil \log_2 n \rceil + 1}$  を重ね合わせることができないが、B形では次のように重ね合わせることができる。

$$S_i \begin{matrix} \epsilon_0 \epsilon_0^{\lceil \log_2 n \rceil} \\ \epsilon_0 \epsilon_0 \dots \epsilon_0 \end{matrix} \text{ と } S_{i+1} \begin{matrix} \epsilon_0^{\lceil \log_2 n \rceil} \\ \epsilon_0 \epsilon_0 \dots \epsilon_0 \end{matrix} \text{ を重ね合わせると、}$$

$$S_i \begin{matrix} \epsilon_0 \epsilon_0 \\ \epsilon_0 \epsilon_0 \dots \epsilon_0 \end{matrix} \text{ と } S_{i+2} \begin{matrix} \epsilon_0^{\lceil \log_2 n \rceil} \\ \epsilon_0 \epsilon_0 \dots \epsilon_0 \end{matrix} \text{ となる。従って、(1)の系列をすべて含}$$

めると長さ  $n + \lceil \log_2 n \rceil$  の系列  $\epsilon_0^{n + \lceil \log_2 n \rceil}$  が得られる。以上のことを考慮し、 $\alpha$ -系列を構成している(1)と(2)の各系列から成る検査部と、それらの系列を結合する遷移系列から成る遷移部の長さを、最短の  $\alpha$ -系列に対して評価すると次のようになる(以下の式の導入過程は省略)。A形の順序機械に対しては、検査部の系列長の総和が  $2n(1 + \lceil \log_2 n \rceil)$ 、遷移部の系列長の総和が  $2(n \lceil \log_2 n \rceil - n + 1)$  となる。従って、 $\alpha$ -系列の長さは、 $L_A = 4n \lceil \log_2 n \rceil + 2$ 。B形の順序機械に対しては、検査部の系列長の総和が  $n + \lceil \log_2 n \rceil + n(1 + \lceil \log_2 n \rceil)$ 、遷移部の系列長の総和が  $n - 1$  以下の検査系列を構成することができる。従って  $\alpha$ -系列の長さ  $L_B$  は、 $L_B \leq n \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 n \rceil + 3n - 1$ 。以上の評価から明らかに、B形の方がA形より  $\alpha$ -系列の長さが短く、十分大きな  $n$  に対しては、約  $1/4$  である。

(例) 図3の4状態順序機械に対して、検査系列を求めるのと次のようになる。

A形: 入力  $\overline{\epsilon_0 \epsilon_0 \epsilon_0} \epsilon_1 \overline{\epsilon_0 \epsilon_0 \epsilon_0} \epsilon_1 \epsilon_1 \overline{\epsilon_0 \epsilon_0 \epsilon_0} \epsilon_1 \epsilon_0$   
 状態  $\begin{matrix} [00] & [10] & [11] & [01] \\ \overline{\epsilon_0 \epsilon_0 \epsilon_0} & \overline{\epsilon_1 \epsilon_0 \epsilon_0} \epsilon_1 & \overline{\epsilon_1 \epsilon_0 \epsilon_0} \epsilon_1 \epsilon_1 & \overline{\epsilon_1 \epsilon_0 \epsilon_0} \epsilon_1 \epsilon_0 & \overline{\epsilon_1 \epsilon_0 \epsilon_0} \end{matrix}$   
 B形: 入力  $\overline{\epsilon_0} \epsilon_0 \overline{\epsilon_0} \epsilon_0 \overline{\epsilon_0 \epsilon_0} \overline{\epsilon_1 \epsilon_0 \epsilon_0}$   
 状態  $\begin{matrix} [00] & [10] & [11] & [01] & [00] & [00] \\ \overline{\epsilon_1 \epsilon_0 \epsilon_0} \epsilon_0 & \overline{\epsilon_1 \epsilon_0 \epsilon_0} \epsilon_1 & \overline{\epsilon_1 \epsilon_0 \epsilon_0} \end{matrix}$   
 $\begin{matrix} [11] & [10] & [01] \end{matrix}$

$L_A=34, L_B=20 < 21$  となり、上で述べた系列長の評価に一致している。

文 献

- (1) F.C.Hennie : " Fault detecting experiments for sequential circuits ", Proc. 5th Ann. Sympon. on Swithing Circuit Theory and Logical Design, Princeton, N.J., p.95 (Nov. 1964).
- (2) 藤原 樹下 : " 入力付加による故障検査容易な順序機械 ", 信学論 (D), 57-D, 10, p.589 (昭49-10).
- (3) H. Fujiwara, T. Sasao, Y. Nagao, and K. Kinoshita : " Easily testable sequential machines with extra inputs ", IEEE Trans., C-24, 8, p.821 (Aug. 1975).
- (4) S.W. Golomb : " Shift register sequences ", Holden-Day, Inc. (1967).

(昭和50年10月8日受付)

UDC 519.713.3

決定性 2次元有限オートマトンに関する二、三の決定問題

井上 克司 中村 昭

井上克司: 正員 広島大学工学部共通講座  
中村 昭: 非会員 同 〃

Some Decision Problems of Deterministic Two-Dimensional Finite Automata. By Katsushi INOUE, Regular Member and Akira NAKAMURA, Nonmember (Faculty of Engineering, Hiroshima University, Hiroshima-shi, 730 Japan).

論文番号: 昭 51-261(D-62)

1. まえがき

従来、2次元テープ上のオートマトンの決定問題については、文献(1)、(2)で若干の考察がなされてはいるが、いまだ十分に論じられていない。2次元テープオートマトンに関する多くの問題が決定不能になることは、既に文献(1)、(2)で示唆されているが、本稿では、具体的に2-DA(決定性2次元有限オートマトン、定義については文献(2)を参照されたい)に関する決定不能性の問題が論じられている。次の結果が示される。

- (1) 任意に2つの2-DA  $M_1, M_2$  が与えられたとき、 $T(M_1) \oplus T(M_2)$  ( $i=1, 2$ )<sup>†</sup> が2-DAによって受理されるか否かは一般に決定不能である。
- (2) 任意に2-DA  $M_1$  が与えられたとき、 $T(M_1)$  が minimal (open, closed, convex) であるか否かは、一般に決定不能である。

なお、本稿で特に定義されない諸用語、諸記法については文献(3)を参照されたい。

2. 諸定義ならびに結果

[定義1]  $\Sigma^{(2)+}$  の上の2項関係 ' $\leq$ ' を次のように定義する。  $\forall x, y \in \Sigma^{(2)+}$ ,

$x \leq y \Leftrightarrow$  ある  $i, j$  ( $1 \leq i \leq l_1(y), 1 \leq j \leq l_2(y)$ ) が存在して、 $x = y \{ \underset{j}{i} \}$ 。

$x \leq y$  且つ  $x \neq y$  のとき、 $x < y$  と記す。

[定義2] (1)  $T \subseteq \Sigma^{(2)+}$  が minimal である  $\Leftrightarrow x < y$  且つ  $y \in T$  ならば、 $x \notin T$  である。(2)  $T \subseteq \Sigma^{(2)+}$  が open である  $\Leftrightarrow x \in T$  ならば、 $y \leq x$  なるすべての  $y$  に対し、 $y \in T$  が成り立つ。(3)  $T \subseteq \Sigma^{(2)+}$  が closed である  $\Leftrightarrow \bar{T} (= \Sigma^{(2)+} - T)$  が open である。(4)  $T \subseteq \Sigma^{(2)+}$  が convex である  $\Leftrightarrow x, y \in T$  且つ  $x \leq y$  ならば、 $x \leq z \leq y$  なるすべての  $z$  に対し、 $z \in T$  が成り立つ<sup>†</sup>。

空集合  $\emptyset$  は、minimal (open, closed, convex) であることに注意しよう。

[定理1] 任意に2つの2-DA  $M_1, M_2$  が与えられたとき  $T(M_1) \oplus T(M_2)$  ( $i=1, 2$ ) が2-DAによって受理される否かは、一般に決定不能である。

(証明)  $i=1$  の場合を例にとる ( $i=2$  の場合も同様に証明される)。  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$  を任意の決定性線形有界オートマトンとする<sup>††</sup>。このとき、 $\Gamma \cup K \times \Gamma$  上の次の性質を満たす2次元テープ  $C$  を  $M$  の受理計算状況系列表現テープと呼ぶ。

- (1)  $l_2(C) \geq 2$ 。
- (2) 各  $k$  ( $1 \leq k \leq l_1(C)$ ) に対し、 $C_{k,1} \in \{ \Phi \} \cup K \times \{ \Phi \}$  且つ、 $C_{k,l_2(C)} \in \{ \$ \} \cup K \times \{ \$ \}$  であり、しかも  $C_{(1,1),1}^{(1,1),l_2(C)-1} \in \Sigma^*$ 、 $C_{1,1} = [q_0, \Phi]$ 、 $C_{1,l_2(C)} = \$$  且つ  $C_{(i,2),l_2(C)-1}^{(i,2),l_2(C)-1} \in \{ (\Gamma - \{ \Phi, \$ \}) \cup K \times (\Gamma - \{ \Phi, \$ \}) \}^{(2)+}$  である。
- (3) 各  $k$  ( $1 \leq k < l_1(C)$ ) に対し、次がいえる: ある  $j$  ( $1 \leq j \leq l_2(C)$ ) に対し、 $C_{k,j} = [q, a] \in K \times \Gamma$  であり、しかも
  - (i)  $\delta(q, a) = (p, b, L)$  ならば、  
 $C_{k+1,j-1} = [p, C_{k,j-1}]$ 、 $C_{k+1,j} = b$  且つ各  $r$  ( $1 \leq r \leq l_2(C)$ )、 $r \neq j, j-1$  に対し、 $C_{k,r} = C_{k+1,r}$  であり、
  - (ii)  $\delta(q, a) = (p, b, R)$  ならば、  
 $C_{k+1,j+1} = [p, C_{k,j+1}]$ 、 $C_{k+1,j} = b$  且つ各  $r$  ( $1 \leq r \leq l_2(C)$ )、 $r \neq j, j+1$  に対し、 $C_{k,r} = C_{k+1,r}$  である。
- (4) ある  $j$  ( $1 \leq j \leq l_2(C)$ ) に対し、 $C_{l_1(C),j} \in F \times \Gamma$  であり、しかも各  $k, r$  ( $1 \leq k < l_1(C), 1 \leq r \leq l_2(C)$ ) に対し、 $C_{k,r} \notin F \times \Gamma$  である。

直観的には、 $M$  の受理計算状況系列表現テープ  $C$  は、その先頭行と最後行がそれぞれ  $M$  の初期計算状況、受理計算状況であり、しかもその第  $j+1$  行目 ( $1 \leq j < l_2(C)$ ) が第  $j$  行目の次の時刻における  $M$  の計算状況になっているようなテープである。

$M$  のすべての受理計算状況系列表現テープの集合を以下  $E(M)$  と記す。このとき、次の条件を満たす2次元テープ  $x$  を考える。

- (1) ある  $i, j$  ( $1 \leq i < l_1(x), 2 \leq j \leq l_2(x)$ ) が存在して

† 演算  $\oplus$  ( $i=1, 2$ ) の定義については、文献(3)を参照されたい。演算  $\oplus$ 、 $\otimes$  はそれぞれ文献(4)における row catenation, column catenation に相当する。

† これらのトポロジカルな概念は、文献(5)で導入されたトポロジカルな概念の2次元への自然な拡張である。  
†† 定義については、文献(6)を参照されたい。