論 文

UDC 519.718.7：681.32-192.001.4

自己検査を有するシステム診断モデル

正 員 藤原 秀雄† 正 員 尾崎 弘†

A Diagnostic Model of Systems with Self-Testing

Hideo FUJIWARA† *and* Hiroshi OZAKI†, *Regular Members*

あらまし Preparata-Metze-Chienのシステム診断モデルは次の仮定を設けている．(1)すべてのユニットはほかのユニットを検査する能力を有する．(2)すべてのユニットは自分自身を検査することはできない．本論文では，これらの仮定を取除き，検査能力のないユニットや自己検査能力のあるユニットなどの存在を認め，より一般的なシステム診断モデルを導入し，その診断モデルに対して次の問題について考察する．(1)与えられたユニット群に対して，t診断可能システムを構成できるための必要十分条件，すなわちt診断可能な診断グラフの存在条件．(2)先の存在条件を満たすユニット群に対してt診断可能な最適システムの構成法．(3)与えられたシステムがt診断可能であるための必要十分条件．(4)診断グラフにおける検査の冗長性と臨界性の判定問題．

1. まえがき

自己診断可能な計算機システムのアーキテクチャに関する研究[(1)～(3)]が進められている一方，システムをグラフで表現しグラフ理論的立場から自己診断可能なシステムの解析および構成問題を取扱う研究が数多く発表されている[(4)～(13)]．

Preparataら[(4)]は，システムを複数個の部分システムに分割し，各部分システム（以下ユニットと称す）は必ずしも同一である必要はないが，ほかのユニットを検査する能力をもっているものと考え，各ユニットを節点に，ユニット間の検査を有向枝に対応させた有向グラフを診断モデルとして考察している．この診断モデルを用いてt診断可能なシステムが存在するための必要十分条件[(4)]，t診断可能な最適システムの構成問題[(4)]，t診断可能であるための必要十分条件[(5),(6)]，冗長な検査の判定問題[(10)]などの研究がなされている．Russellら[(7),(8)]は，枝と検査が一対一に対応しているこの診断モデルを多対一対応に拡張し，Maeshwariら[(11)]は，ユニットに故障確率を導入した確率モデルを，Blount[(12)]は検査結果の信頼度を導入した確率モデルを各々発表している．

Preparataらの診断モデルにおける仮定に，次の2点がある．すなわち，(1)すべてのユニットはほかのユニットを検査する能力を有し，(2)すべてのユニットは自分自身を検査することはできない．しかしながら，実際の計算機システムにおいてはこれらの仮定が成立しない場合が多く，例えば，ほかのユニットを検査する機能をもたないユニットや，自分自身を検査することの可能なユニットをもつシステムがそれである．そこで，これらの仮定を設けないより一般的な診断モデルが必要となる．本論文では，Preparataらの診断モデルを次に示す3種類のユニット群からなるシステムの診断モデルに拡張する．すなわち，(1)検査不能ユニット，(2)自己検査可能ユニット，及び，(3)それ以外のユニットである．この診断モデルに対して，主として次に示す四つの問題について考察する．

(1) 与えられたユニット群に対して，t診断可能システムを構成することができるための必要十分条件，すなわち，t診断可能な診断グラフの存在条件．

(2) 先の存在条件を満たすユニット群に対してt診断可能な最適システムの構成法．

(3) 与えられたシステムがt診断可能であるための必要十分条件．

(4) 診断グラフにおける検査の冗長性と臨界性の判定問題．

2. 診断モデルと診断可能性

システムSの診断モデルを$S=(V, V_1, V_2, \Gamma)$で表現する．ここで，

†大阪大学工学部電子工学科，吹田市
Faculty of Engineering, Osaka University, Suita-shi, 565 Japan
論文番号：昭 54-516[D-91]

V はユニットの集合．

V_1 は検査機能をもたないユニットの集合．

V_2 は自分自身を検査できる自己検査可能ユニットの集合．

$\Gamma : V \rightarrow 2^V$ は接続関数で，ユニット u_i が u_j を検査するとき及びそのときに限り $u_j \in \Gamma(u_i)$ とする．

Γ が定義されていないシステムを $S=(V, V_1, V_2, -)$ で表す．

$X \subseteq V$ に対して，

$$\Gamma(X)=\bigcup_{u \in X} \Gamma(u)$$
$$\Delta(X)=\Gamma(X)-X$$
$$\Gamma^{-1}(X)=\{u \mid \Gamma(u) \cap X \neq \phi\}$$
$$\Delta^{-1}(X)=\Gamma^{-1}(X)-X$$

と定義する．明らかにこの診断モデルは，有向グラフ $G=(V, \Gamma)$ によっても表現でき，それを診断グラフと呼ぶ．

検査機能をもたないユニットは，ほかのユニットを検査不能であり，V_2 に属さないユニットは自己検査不能であるので，接続関数 Γ は次の条件を満足せねばならない．

［接続条件］

(1)　$u \in V_1$ に対して，$\Gamma(u)=\phi$．

(2)　$u \in V-V_2$ に対して，$u \notin \Gamma(u)$．

検査の結果は診断グラフ G の枝に"0"や"1"を重みとして割当てることによって表される．すなわち，枝 (u_i, u_j) の重み $\sigma(u_i, u_j)$ は u_i が u_j を正常状態と評価したとき $\sigma(u_i, u_j)=0$，u_i が u_j を故障状態と評価したとき $\sigma(u_i, u_j)=1$ で表される．このようにして，システムの検査結果は診断グラフの枝に重みが付加された有向グラフで表され，重み関数 σ のことをシステムのシンドロームと呼ぶ．ここで，ユニット u_i が u_j を（$u_i=u_j$ でもよい）検査する場合，u_j が正常状態ならばその検査結果は信頼できるが，u_i が故障ならばその検査結果は信頼できないので，0と1のどちらの値をも取り得る．従って，与えられたシンドロームに対して故障ユニットの集合は次のように定義される．

［定義1］　次の条件1，2を満たす V の部分集合 F をシンドローム σ に関する弱矛盾故障集合という．

（条件1）　$u_j \in \Gamma(u_i)$，$u_i \in \overline{F}=V-F$，$u_j \in F$ なるすべての u_i, u_j に対して，

$$\sigma(u_i, u_j)=1$$

（条件2）　$u_j \in \Gamma(u_i)$，$u_i, u_j \in \overline{F}$ なるすべての u_i，u_j に対して，

$$\sigma(u_i, u_j)=0$$

［定義2］　条件1，2に加えて次の条件3を満たす V の部分集合 F をシンドローム σ に関する強無矛盾故障集合という．

（条件3）　$u_i \in \Gamma(u_i)$，$u_i \in F$ なるすべての u_i に対して，$\sigma(u_i, u_i)=1$．

定義1，2による各々の無矛盾故障集合に関して，t 診断可能なシステムを次のように定義する．

［定義3］　任意のシンドローム σ に対して，たかだか t 個のユニットからなる無矛盾故障集合がたかだか一つしか存在しないならば，このシステムは同時 t 重診断可能（略して t 診断可能）であるという．

弱無矛盾故障集合の立場では，自分自身を検査する機能はシステムの診断能力の向上に何ら貢献しないことが，次の補題1により示される．

［補題1］　システム S の任意のユニット $u_1, u_2, \cdots, u_m$ に自己枝を付加したシステムを S^* とする．S が t 診断可能であるための必要十分条件は，S^* が t 診断可能であることである．

（証明）　必要条件は明らか．

（十分条件）　システム S^* において，すべての自己枝の検査結果が0となる任意のシンドローム σ に対して S^* が t 診断可能であるためには，明らかに S が t 診断可能でなければならない．　（証明終）

強無矛盾故障集合の立場では，自己検査の結果は非常に信頼性の高いものと考え，自己検査の結果が0であればそのユニットは正常，1であれば故障とみなす．このような自己検査可能なユニットとしては，完全な自己検査機能を有するユニットだけでなく，常に正常であるとみなされるハードコアにより検査されるようなユニットをも対象とすることができる．

以下では，強無矛盾故障集合だけに対象を限定し，単に無矛盾故障集合と記すことにする．

3. 診断可能システムの存在条件

システムを構成するユニット群が与えられたとき，それらのユニットがもつ検査機能を活用して t 診断可能なシステムを構成できるかどうかの判定問題を考察する．換言すれば，システム $S=(V, V_1, V_2, -)$ が与えられたとき，$\hat{S}=(V, V_1, V_2, \Gamma)$ が t 診断可能となるような，接続条件を満たす接続関数 Γ が存在するための必要十分条件を示す．

［定理1］　システム $S=(V, V_1, V_2, -)$ が与えられたとき，

$|V_2| \geq t$ ならば，$\hat{S}=(V, V_1, V_2, \Gamma)$ が t 診断可能

となるΓが常に存在し，

$|V_2|<t$ ならば，$\hat{S}=(V, V_1, V_2, \Gamma)$ が t 診断可能となるΓが存在するための必要十分条件は，

$$|V|+|V_2|-|V_1|\geqq 2t+1$$

である．但し，Γは接続条件を満足するものとする．

（証明） $|V_2|\geqq t$ の場合，$\hat{S}=(V, V_1, V_2, \Gamma)$ のΓとして，

$$u\in V_2 \text{ に対して } \Gamma^{-1}(u)=\{u\}$$
$$u\notin V_2 \text{ に対して } \Gamma^{-1}(u)=V_2$$

と定義すれば，明らかにΓは接続条件を満たす．

$|V_2|\geqq t$ であるので，$\hat{S}$においてV_2のユニットがすべて故障か，V_2の中には少なくとも一つの正常ユニットu_0が存在するかのいずれかである．先の場合，無矛盾故障集合はV_2と一意的に判定される．後の場合，V_2以外のユニットは正常ユニットu_0で検査されるので，無矛盾故障集合が一意的に判定される．従って，$\hat{S}$はt診断可能である．

$|V_2|<t$ の場合．

（十分性） $\hat{S}=(V, V_1, V_2, \Gamma)$の$\Gamma$として，

$$u\in V_2 \text{ に対して，} \Gamma^{-1}(u)=\{u\},$$
$$u\notin V_2 \text{ に対して，} \Gamma^{-1}(u)=V-V_1-\{u\}$$

と定義する．明らかにΓは接続条件を満たす．

V_2の中に正常ユニットが少なくとも一つあれば，明らかにすべてのユニットの状態を識別でき，無矛盾故障集合が一意的に判定される．

V_2のユニットがすべて故障の場合，$V-V_1-V_2$ の中にたかだか $t-|V_2|$ 個の故障ユニットが存在する．

$$|V|-|V_1|-|V_2|\geqq 2(t-|V_2|)+1$$

であるから，$V-V_1-V_2$からなる部分システムは$(t-|V_2|)$診断可能である（文献(4)の定理1参照）．従って，$V-V_1-V_2$の中のたかだか $t-|V_2|$の故障ユニットはすべて識別される．

一方，$|V_2|<t$ であるので$|V|-|V_1|-|V_2|>t$ である．従って，$V-V_1-V_2$の中に少なくとも一つ正常ユニットu_0が発見されるので，残りV_1のユニットはすべて診断される．以上よりVの中のたかだかt個の故障ユニットはすべて一意的に識別される．

（必要性） V_2がすべて故障で，V_1がすべて正常の場合，$V-V_1-V_2$にはたかだか$(t-|V_2|)$個の故障ユニットが存在することになる．従って，システム$\hat{S}$がt診断可能であるためには，$V-V_1-V_2$からなる$\hat{S}$の部分システムが$(t-|V_2|)$診断可能でなければならない．従って，Preparata ら[4]の定理から，

$$|V|-|V_1|-|V_2|\geqq 2(t-|V_2|)+1$$

となる． （証明終）

［系1］ システム $S=(V, V_1, V_2, -)$が与えられたとき，$\hat{S}=(V, V_1, V_2, \Gamma)$が$t$診断可能となる$\Gamma$が存在するための必要十分条件は，

$$t\leqq \max\left\{|V_2|,\ \left\lfloor\frac{|V|+|V_2|-|V_1|-1}{2}\right\rfloor\right\}$$

である．但し，$\lfloor x\rfloor$はxより大きくない最大整数とする．

$V_1=V_2=\phi$の場合，定理1の条件は$|V|\geqq 2t+1$となり，Preparata ら[4]の定理1の結果と一致する．このことから Preparata らの診断モデルに比較して，自己検査可能ユニットを導入すれば，システムの診断能力tの上限が大きくなることが分かる．

4．最適システムの構成

この章では，t診断可能な最適システムの構成について考察する．すなわち，任意に与えられたシステム$S=(V, V_1, V_2, -)$が前章の存在定理の条件を満たすとき，$\hat{S}=(V, V_1, V_2, \Gamma)$が最小の枝数を有する$t$診断可能システムとなるような接続関数$\Gamma$の構成法を示す．

Preparata らの診断モデルでは，システムSがt診断可能であれば，各ユニットは少なくともt個のユニットによって検査されねばならない．本診断モデルではこの結果を拡張する．まず，システムSにおける自己検査を有するすべてのユニットをUとする．すなわち，$U=\{u\mid u\in\Gamma(u)\}$とする．このとき明らかに次の補題が成立する．

［補題2］ $S=(V, V_1, V_2, \Gamma)$をt診断可能システムとする．このとき，任意の$u\in V-U$に対して，$|\Gamma^{-1}(u)|\geqq t$ である．

システムSの自己枝数をmとすると，$0\leqq m\leqq|V_2|$である．自己枝をもたないユニット数は$|V|-m$となり，補題2からそれらのユニットに入射する枝の総和は少なくとも$(|V|-m)t$となる．従って，システムの枝数は$(|V|-m)t+m$となり，この最小値は，$m=|V_2|$のときで$(|V|-|V_2|)t+|V_2|$となる．

［補題3］ 最適システム $S=(V, V_1, V_2, \Gamma)$の枝数は少なくとも$(|V|-|V_2|)t+|V_2|$である．

$S=(V, V_1, V_2, \Gamma)$の任意の$u\in V_2$ に対してuに入射する枝をすべて除去し，uに自己枝を付加したシステムを$S_*=(V, V_1, V_2, \Gamma_*)$とする．すなわち，

$$u\in V_2 \text{ に対して，} \Gamma_*^{-1}(u)=\{u\}$$
$$u\notin V_2 \text{ に対して，} \Gamma_*^{-1}(u)=\Gamma^{-1}(u)$$

である．このS_*に対して次の性質がある．

［定理２］ S が t 診断可能ならば，S_* も t 診断可能である．

（証明） S_* が t 診断可能でないと仮定すると，S_* におけるあるシンドローム σ_* に対して，$|F_1|\leqq t$，$|F_2|\leqq t$ なる $F_1\neq F_2\subseteqq V$ が存在し，それらが σ_* に関して無矛盾故障集合となる．

σ_* より，システム S におけるシンドローム σ を次のように作成する．すなわち，

$u_j\in\Gamma(u_i)$，$u_i\in V$，$u_j\notin V_2$ に対して，

$$\sigma(u_i,\ u_j)=\sigma_*(u_i,\ u_j)$$

$u_j\in\Gamma(u_i)$，$u_i\in V$，$u_j\in V_2$ に対して，

$$\sigma(u_i,\ u_j)=\sigma_*(u_j,\ u_j)$$

とする．このようにして決めたシンドローム σ に対して，F_1, F_2 はやはりシステム S において無矛盾故障集合となる．従って，S は t 診断可能ではない．

（証明終）

S から S_* への変換操作により，$u\in V_2$ に入射する枝が２個以上の場合，診断能力を低下させることなく枝数を減少させることが可能である．この操作を用いて，Preparataら[4]の最適システム $D_{\delta t}$ から，本論文の診断モデルでの一つの最適システムを構成する方法を次に述べる．$D_{\delta t}$ システムとは，ユニット $u_1, u_2, \cdots, u_n$ からなり，$j-i=\delta m\ (\mathrm{modulo}\ n)$，$1\leqq m\leqq t$ のとき及びそのときに限りユニット u_i から u_j へ枝があるシステムのことである．余談ではあるが，$D_{\delta t}$ システムの枝数は $|V|\cdot t$ なので，本論文での診断モデルでは最適システムではないことに注意しておこう．

［$D^{\mathrm{I}}_{\delta t}$ システム構成法］

(1) $V-V_1$ のユニット群に対して $D_{\delta t}$ システムを作成する．それを $G_0=(V-V_1,\ \Gamma_0)$ とする．

(2) G_0 から次のような診断グラフ $G=(V,\ \Gamma)$ を作成する．すなわち，

$u\in V_2$ に対して，$\Gamma^{-1}(u)=\{u\}$

$u\in V_1$ に対して，$|\Gamma^{-1}(u)|=t$

$u\in V-V_1-V_2$ に対して，$\Gamma^{-1}(u)=\Gamma_0^{-1}(u)$

とする．

以上の操作により作成されるシステム $S=(V,\ V_1,\ V_2,\ \Gamma)$ を $D^{\mathrm{I}}_{\delta t}$ システムと呼ぶ．

定理２より，$D^{\mathrm{I}}_{\delta t}$ システムは t 診断可能であることが示される．又，枝数は $(|V|-|V_2|)t+|V_2|$ なので，補題３より $D^{\mathrm{I}}_{\delta t}$ システムは最適システムであることが分かる．上記の操作(2)から分かるように，$D^{\mathrm{I}}_{\delta t}$ システムは一意的には決まらない．図１に，D^{I}_{12} システムの例を示す．但し，$V_1=\{u_6\}$，$V_2=\{u_1\}$ である．

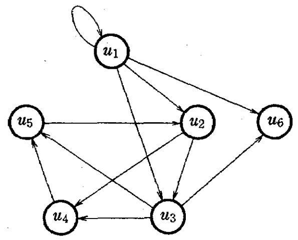

図１ D^{I}_{12} システム

Fig. 1 - D^{I}_{12} system.

$D^{\mathrm{I}}_{\delta t}$ システムとは別な最適システム $D^{\mathrm{II}}_{\delta t}$ を次に示す．

［$D^{\mathrm{II}}_{\delta t}$ システムの構成法］

（$|V_2|\geqq t$ の場合）

接続関数 Γ を次のように定義する．すなわち，

$u\in V_2$ に対して，$\Gamma^{-1}(u)=\{u\}$

$u\in V-V_2$ に対して，$\Gamma^{-1}(u)\subseteqq V_2$ 且つ，

$|\Gamma^{-1}(u)|=t$ とする．

（$|V_2|<t$ の場合）

(1) $V-V_1-V_2$ のユニット群に対して，t 診断可能な $D_{\delta t'}$ システム（$t'=t-|V_2|$）を作成する．それを $G_0=(V-V_1-V_2,\ \Gamma_0)$ とする．

(2) G_0 から次のような診断グラフ $G=(V,\ \Gamma)$ を作成する．すなわち，

$u\in V_2$ に対して，$\Gamma^{-1}(u)=\{u\}$

$u\in V_1$ に対して，$|\Gamma^{-1}(u)|=t$

$u\in V-V_1-V_2$ に対して，$\Gamma^{-1}(u)=V_2\cup\Gamma_0^{-1}(u)$

とする．

以上の操作により作成されるシステムを $D^{\mathrm{II}}_{\delta t}$ システムと呼ぶ．$D^{\mathrm{II}}_{\delta t}$ システムが t 診断可能であることは，定理１の証明と同様にして証明することができる．又，枝数は $(|V|-|V_2|)t+|V_2|$ なので，$D^{\mathrm{II}}_{\delta t}$ システムは最適システムである．図２に D^{II}_{12} システムの例を示す．但し，$V_1=\{u_6\}$，$V_2=\{u_1\}$ である．

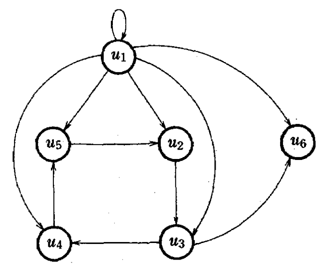

図２ D^{II}_{12} システム

Fig. 2 - D^{II}_{12} system.

$D^{\mathrm{I}}_{\delta t}$ システムや $D^{\mathrm{II}}_{\delta t}$ システムは，$V_1=V_2=\phi$ の場合に，$D_{\delta t}$ システム[4]に一致する．すなわち，$D^{\mathrm{I}}_{\delta t}$，$D^{\mathrm{II}}_{\delta t}$ システムは $D_{\delta t}$ システムの拡張になっている．

5. システムの診断能力

前章までは，ユニット群が与えられたとき，所望の診断能力をもつ最適システムを構成する方法について考察した．この章では，接続関数 Γ が定義されたシステムに対してどれだけの診断能力を有するかを調べる．すなわち，システムが t 診断可能であるための必要十分条件を明らかにする．Preparata ら[4]の診断モデルに対しては Allan ら[6]がユニット群の分割を利用して，t 診断可能性の必要十分条件を示している．ここでは，Allan らが導入した分割をここでの診断モデル用に変更し，Allan らの結果を拡張した t 診断可能性の必要十分条件を示す．

システム $S=(V, V_1, V_2, \Gamma)$ の診断グラフを $G=(V, \Gamma)$ とし，自己枝をもつユニットの全体を U と記す．明らかに，$U\subseteq V_2$ で，必ずしも $U=V_2$ とは限らない．

診断グラフ $G=(V, \Gamma)$ において，次の条件を満たす V のすべての分割 $p=(X, Y, Z)$ の集合を $P(G)$ と記す．

(1) X, Y, Z は互いに素な集合で，$Z\neq\phi$．

(2) $\Delta(X)\subseteq Y$（すなわち，$\Gamma(X)\subseteq X\cup Y$）

(3) $U\subseteq X\cup Y$

分割 $p=(X, Y, Z)$ に対して，

$$k(p)=|Y|+\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil$$

とし，

$$\tau(G)=\min_{p\in P(G)}\{k(p)\}-1$$

と定義する．ここで，$\lceil x\rceil$ は x より小さくない最小整数である．又，$P(G)$ が空集合の場合は，$\tau(G)=1$ と定義することにする．

［定理3］ システム S の診断グラフを G とする．システム S が t 診断可能であるための必要十分条件は，すべての $p\in P(G)$ に対して $k(p)>t$ となること，すなわち，$t\leq\tau(G)$ である．

（証明）（必要性） $k(p)\leq t$ なる分割 $p=(X, Y, Z)\in P(G)$ が存在すると仮定する．Z を，$|Z_2|\leq|Z_1|\leq|Z_2|+1$ なる互いに素な Z_1 と Z_2 に分割する．$Z=Z_1\cup Z_2$，$Z_1\cap Z_2=\phi$．

ここで，$F_1=Y\cup Z_1$，$F_2=Y\cup Z_2$ とおけば，

$$|F_1|=|Y|+|Z_1|\leq k(p)\leq t$$
$$|F_2|=|Y|+|Z_2|\leq k(p)\leq t$$

となる．次のようなシンドローム σ を考えよう．

$\overline{F}_1$ から F_1 に入射する枝 (u, v) や，$\overline{F}_2$ から F_2 へ入射する枝 (u, v) に対して，$\sigma(u, v)=1$，

$u\in Y\cap U$ に対して，$\sigma(u, u)=1$，

$u\in X\cap U$ に対して，$\sigma(u, u)=0$，

とし，残りの枝 (u, v) に対しては，$\sigma(u, v)=0$ とする．このシンドローム σ に関して，F_1，F_2 は共に無矛盾故障集合になっている．従って，S は t 診断可能ではない．

（十分性） S が t 診断可能でないと仮定する．S が t 診断可能でないので，あるシンドローム σ に関して，$F_1\neq F_2$，$|F_1|\leq t$，$|F_2|\leq t$ なる無矛盾故障集合 F_1，F_2 が存在する．ここで，次のような分割 (X, Y, Z) を考える．$X=V-(F_1\cup F_2)$，$Y=F_1\cap F_2$，$Z=(F_1\cup F_2)-(F_1\cap F_2)$．$F_1\neq F_2$ より $Z\neq\phi$ となる．F_1，F_2 が無矛盾故障集合であるので，

$$\Delta(X)\subseteq Y,\quad U\subseteq X\cup Y$$

でなければならない．従って，$p=(X, Y, Z)$ は $P(G)$ に属する分割である．

一方，$2|Y|+|Z|=|F_1|+|F_2|\leq 2t$ であるので，$k(p)=|Y|+\lceil|Z|/2\rceil\leq t$ となる．すなわち，$\tau(G)<t$． （証明終）

定理3により，$\tau(G)$ は診断グラフ G の診断能力を表現する尺度になっていることが分かる．ここでの $P(G)$ は，$U=\phi$ の場合，Allan ら[6]の定義した分割集合と一致するので，定理3は Allan ら[6]の結果の拡張になっている．

$V=U$ の場合，すなわちすべてのユニットに自己枝が存在する場合は，$P(G)$ は空集合となる．従って，定理3の条件は常に成立し，システム S は常に t 診断可能である．これは，すべての自己検査可能ユニットからなるシステムは，すべてのユニットが故障しても識別できることを示している．

システム $S=(V, V_1, V_2, \Gamma)$ は t 診断可能であるが，$(t+1)$ 診断可能でないとするとき，この値 t はシステム S の診断能力の上限を示しており，以下，この t のことを単に診断能力と呼ぶことにする．定理3は診断グラフ G の診断能力が $\tau(G)$ であることを示している．

［定理4］ システム $S=(V, V_1, V_2, \Gamma)$ とその診断グラフ $G=(V, \Gamma)$ が与えられたとき，

$V=V_1\cup V_2$ ならば，$\tau(G)\leq|V_2|$，

$V\neq V_1\cup V_2$ ならば，$\tau(G)\leq\left\lfloor\frac{|V|+|V_2|-|V_1|-1}{2}\right\rfloor$

である．

(証明)($V=V_1\cup V_2$ の場合)

$V_1\neq\phi$ ならば，$p_0=(V_1-\{v\}, V_2, \{v\})$ とおけば明らかに $p_0\in P(G)$ である.

$$\min_{p\in P(G)}\{k(p)\}\leqq k(p_0)=|V_2|+\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil=|V_2|+1$$

故に，$\tau(G)\leqq|V_2|$ となる.

$V_1=\phi$ ならば，$|V_2|=|V|$ となり明らかに，$\tau(G)\leqq|V_2|$ である.

等号は，次に示す Γ からなる診断グラフ $G=(V,\Gamma)$ のときに成立する.

$u\in V_1$ に対して，$\Gamma^{-1}(u)=V_2$

$u\in V_2$ に対して，$\Gamma^{-1}(u)=\{u\}$

($V\neq V_1\cup V_2$ の場合)

$p_0=(V_1, V_2, V-(V_1\cup V_2))$ とおくと，明らかに，$p_0\in P(G)$ となる.

$$\min_{p\in P(G)}\{k(p)\}\leqq k(p_0)=|V_2|+\left\lceil\frac{|V|-|V_2|-|V_1|-1}{2}\right\rceil$$

故に，

$$\tau(G)\leqq|V_2|+\left\lceil\frac{|V|-|V_2|-|V_1|}{2}\right\rceil-1$$

$$=\left\lfloor\frac{|V|+|V_2|-|V_1|-1}{2}\right\rfloor$$

となる．等号は，次の Γ からなる診断グラフ $G=(V,\Gamma)$ のときに成立する.

$u\in V-V_2$ に対して，$\Gamma^{-1}(u)=V-V_1$

$u\in V_2$ に対して，$\Gamma^{-1}(u)=\{u\}$

(証明終)

［系2］ システム $S=(V, V_1, V_2, \Gamma)$ とその診断グラフ $G=(V,\Gamma)$ が与えられたとき，

$$\tau(G)\leqq\max\left\{|V_2|,\ \left\lfloor\frac{|V|+|V_2|-|V_1|-1}{2}\right\rfloor\right\}$$

である.

系2は，既に述べた系1と同じ内容を示している．ここでは，同じ結果を異なる方法で証明した.

6. 検査の冗長性と臨界性

システムの診断グラフを G とするとき，このシステムの診断能力は $\tau(G)$ であるが，与えられたシステムが最適でない場合，診断グラフ G のある枝 e を除いても診断能力が低下しない場合がある．この場合，枝 e に対応する検査を行わずともほかの枝に対応する検査だけで，たかだか $\tau(G)$ 個の故障ユニットはすべて一意的に識別することができる．このような枝 e は，診断において冗長であると考えることができ，冗長な枝を除くことにより最適なシステムへ近づけることが可能である.

又，診断グラフ G にない枝 e を付加すると診断能力が増加する場合がある．このような枝が存在することは，システムの診断能力はある臨界状態に達しており，この枝を付加することにより容易に診断能力を向上することが可能であることを示している．このような枝を探すことは診断能力の向上のためには重要であろう.

［定義4］ 診断グラフ G から枝 e を除いた診断グラフを $G-\{e\}$ と書くとき，$\tau(G)=\tau(G-\{e\})$ ならば，枝 e は冗長であるという．診断グラフ G にない枝 e を付加した診断グラフを $G\cup\{e\}$ と書くとき，$\tau(G)<\tau(G\cup\{e\})$ ならば，枝 e は臨界であるという.

診断グラフ G の分割集合 $P(G)$ から最小分割集合 $P_0(G)$ を $P_0(G)=\{p\in P(G)\mid k(p)=\min_{p\in P(G)}\{k(p)\}\}$ と定義する．最小分割集合 $P_0(G)$ の各ブロック X, Y, Z の共通部分 X_p, Y_p, Z_p を，

$$X_p=\bigcap_{(X,Y,Z)\in P_0(G)}X,\quad Y_p=\bigcap_{P_0(G)}Y,\quad Z_p=\bigcap_{P_0(G)}Z$$

と定義する．これらの集合を用いて，枝の臨界性，冗長性の必要十分条件を以下の定理で示す.

［定理5］ $v_1\notin V_1$, $v_2\notin\Gamma(v_1)$, $v_1\neq v_2$ なるユニット v_1, v_2 に対して，枝 e が臨界であるための必要十分条件は，$v_1\in X_p$, $v_2\in Z_p$, 且つ任意の $p=(X, Y, Z)\in P_0(G)$ に対して，$|Z|=1$ 又は偶数となることである.

(証明略) Toida[10] の定理4と同様に証明可能.

［定理6］ $v\in V_2$, $v\notin\Gamma(v)$ なるユニット v に対して，枝 $e=(v,v)$ が臨界であるための必要十分条件は，$v\in Z_p$, 且つ任意の $p=(X, Y, Z)\in P_0(G)$ に対して，$|Z|=1$ 又は偶数となることである.

(証明)(十分性)

G に自己枝 $e=(v,v)$ を付加したグラフを G' とする．いま，枝 e が臨界でないと仮定する．$\tau_G=\tau_{G'}$ となり，$k(p)=\tau(G)+1$ なる分割 p が $P(G')$ に存在する.

$p=(X, Y, Z)\in P(G')$ より，$v\notin Z$ でなければならない．又，$k(p)=\tau(G)+1$ であることから，p は最小分割で $p\in P_0(G)$ である.

ところが，仮定より $v\in Z_p=\bigcap_{P_0(G)}Z$ であるので，$v\in Z$ でなければならない．これは $v\notin Z$ に矛盾する.

(必要性)

$v\notin Z_p$ と仮定すれば，$v\notin Z$, $p\in P_0(G)$ なる分割 $p=(X, Y, Z)$ が存在する．$v\notin Z$ であるので $v\in X\cup Y$ である．従って，$p\in P(G')$ である．故に，

$$\tau(G')+1 \leqq k(p)=|Y|+\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil$$
$$=\tau(G)+1$$

従って，$\tau(G') \leqq \tau(G)$となり，$e=(v,v)$が臨界であるのに反する．このことから$v \in Z_p$でなければならない．

次に，$|Z|$が3以上の奇数となる$p=(X, Y, Z) \in P_0(G)$が存在すると仮定する．

$v \in Z_p$より$v \in Z$となり，$p \notin P(G')$である．ここで，$q=(X, Y \cup \{v\}, Z-\{v\})$とおけば，$q \in P(G')$である．

$|Z|$＝奇数である故，

$$k(q)=|Y|+1+\left\lceil\frac{|Z|-1}{2}\right\rceil$$
$$=|Y|+\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil$$
$$=k(p)$$
$$=\tau(G)+1$$

となる．故に，

$$\tau(G') \leqq k(q)-1=\tau(G)$$

となり，自己枝$e=(v,v)$が臨界であるのに反する．従って，すべての分割$(X, Y, Z) \in P_0(G)$に対して$|Z|$が1又は偶数である．（証明終）

［定理7］ 診断グラフGの枝$e=(u,v)(u \neq v)$が非冗長であるための必要十分条件は，ある分割$(X, Y, Z) \in P_0(G)$に対して，

(1) $u \in Y$, $v \in Z$, $\Gamma(u) \cap Z=\{v\}$, $|Z|$＝奇数であるか，又は

(2) $u \in X$, $v \in Y-U$, $\Gamma^{-1}(v) \cap X=\{u\}$, $|Z|$＝奇数となることである．

（証明略） Toida[10]の定理5と同様に証明可能．

［定理8］ 診断グラフGの自己枝$e=(v,v)$が非冗長であるための必要十分条件は，ある分割$p=(X, Y, Z) \in P_0(G)$に対して，$v \in Y$, $|Z|$＝奇数，$v \notin \Gamma(X)$となることである．

（証明）（十分性）

ある分割$p=(X, Y, Z) \in P_0(G)$に対して，$v \in Y$, $|Z|$＝奇数，$v \notin \Gamma(X)$とする．

枝$e=(v,v)$を除いたグラフを$G'=G-\{e\}$とする．

$$X'=X,\ Y'=Y-\{v\},\ Z'=Z \cup \{v\}$$

とおけば，$v \notin \Gamma(X)$, $\Delta(X) \subseteq Y$であることから，$\Delta(X') \subseteq Y'$となる．

グラフG'では，自己枝をもつユニットの集合U'は$U'=U-\{v\}$であるから，$X \cup Y \supseteq U$より，$X' \cup Y' \supseteq U'$が成立つ．従って，分割$q=(X', Y', Z')$は，$q \in P_0(G')$となる．

$|Z|$＝奇数であるので，

$$k(q)=|Y'|+\left\lceil\frac{|Z'|}{2}\right\rceil$$
$$=|Y|-1+\left\lceil\frac{|Z|+1}{2}\right\rceil$$
$$=|Y|+\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil-1$$

となる．従って，

$$\tau(G') \leqq k(q)-1<k(p)-1=\tau(G)$$

となり，枝$e=(v,v)$は非冗長である．

（必要性）

枝$e=(v,v)$が非冗長ならば，

$$\tau(G')<\tau(G),\ すなわち,\ k(q)<\tau(G)+1$$

となる分割$q \in P_0(G')$が存在する．すなわち，分割qは，ある$p=(X, Y, Z) \in P_0(G)$から，

$$X'=X,\ Y'=Y-\{v\},\ Z'=Z \cup \{v\}$$

として生成される分割$q=(X', Y', Z') \in P(G')$である．

又，$h(q)<k(p)$なので，

$$|Y|-1+\left\lceil\frac{|Z|+1}{2}\right\rceil<|Y|+\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil$$

である．従って，$|Z|$＝奇数となる．

もし，$v \in \Gamma(X)$ならば，$\Delta(X') \subsetneq Y'$となり，$q \notin P(G')$となる．これは先の$q \in P(G')$に矛盾する．従って，$v \notin \Gamma(X)$でなければならない．（証明終）

以上の定理を例で示してみよう．図3に示す診断グラフGを考えてみよう．$V=\{u_1, u_2, u_3\}$, $V_1=\{u_3\}$, $V_2=\{u_1, u_2\}$とする．Vの最小分割を求めると，$p_1=(\{u_3\}, \{u_1\}, \{u_2\})$と$p_2=(\phi, \{u_1\}, \{u_2, u_3\})$である．$X_p=\phi$, $Y_p=\{u_1\}$, $Z_p=\{u_2\}$となる．従って，u_2は定理6の条件を満たし自己枝(u_2, u_2)は臨界である．又，枝(u_1, u_2)は分割p_1に関して定理7の条件(1)を満たし，非冗長な枝であることが分かる．一方，枝(u_1, u_1)は分割p_1に関して定理8の条件を満たすので，非冗長である．

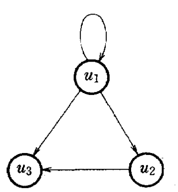

図3 診断グラフG
Fig. 3 Diagnostic graph G.

7. むすび

本論文では，Preparata-Metze-Chien の診断モデルを拡張して，自己検査ユニットを含む新しいシステム診断モデルを導入した．その診断モデルに対して，t 診断可能システムの存在定理，t 診断可能性の必要十分条件，最適システムの構成法，検査の冗長性と臨界性の判定条件について考察した．これらの結果は，すべて従来のPreparataらの診断モデルに対する結果を特別な場合として包含しており，その一般化とみなすことができる．又，本論文での診断モデルは，ハードコア，自己検査可能ユニット，検査不能ユニットなどを考慮している点，より現実的なシステム診断モデルと考えることができる．

謝辞　筆者の一人藤原が日ごろ御指導頂く広島大学樹下行三教授に厚く謝意を表す．又，御討論頂いた本学大学院の金武完氏ならびに尾崎研究室の諸氏に深謝する．

文　献

(1) Forbs, R.E., Rutherford, D.H., Stieglitz, C.B. and Tung, L.H. : "A self-diagnosable computer", 1965 Fall Joint Comput. Conf., 27, p.1073 (1965).

(2) Manning, E. : "On computer self-diagnosis, Part I : experimental study of a processor, ; Part II : generalizations and design principles", IEEE Trans. Electron. Comput., EC-15, p.873 and p.882 (Dec. 1966).

(3) Ciompi, P. and Simoncini, L. : "Design of self-diagnosable mini-computers using bit sliced microprocessors", J. DA & FTC, 1, 4, p.363 (Oct. 1977).

(4) Preparata, F.P., Metze, G. and Chien, R.T. : "On the connection assignment problem of diagnosable systems", IEEE Trans. Electron. Comput., EC-16, p.848 (Dec. 1967).

(5) Hakimi, S.L. and Amin, A.T. : "Characterization of connection assignment of diagnosable systems", IEEE Trans. Comput., C-23, p.86 (Jan. 1974).

(6) Allan, F.J., Kameda, T. and Toida, S. : "An approach to the diagnosability analysis of a system", IEEE Trans. Comput., C-24, p.1040 (Oct. 1975).

(7) Russell, J.D. and Kime, C.R. : "System fault diagnosis : Closure and diagnosability with repair", IEEE Trans. Comput., C-24, p.1078 (Nov. 1975).

(8) Russell, J.D. and Kime, C.R. : "System fault diagnosis : Masking, exposure and diagnosability without repair", IEEE Trans. Comput., C-24, p.1155 (Dec. 1975).

(9) Barsi, F., Grandoni, F. and Maestrini, P. : "A theory of diagnosability of digital systems", IEEE Trans. Comput., C-25, p.585 (June 1976).

(10) Toida, S. : "System diagnosis and redundant tests", IEEE Trans. Comput., C-25, p.1167 (Nov. 1976).

(11) Maeshwari, S.N. and Hakimi, S.L. : "On models for diagnosable systems and probabilistic fault diagnosis", IEEE Trans. Comput., C-25, p.228 (Jan. 1976).

(12) Blount, M.L. : "Probabilistic treatment of diagnosis in digital systems", Proc. FTCS-7, p.72 (June 1977).

(13) Fujiwara, H. and Kinoshita, K. : "On the computational complexity of system diagnosis", IEEE Trans. Comput., C-27, p.881 (Oct. 1978).

（昭和54年4月13日受付）