論　文

UDC 681.325-192.001.4：519.175

自己診断システムにおける診断能力の改善法

正員 金　武完† 　正員 藤原　秀雄†† 　正員 樹下　行三†††

A Method for Improving the Diagnosability of Self-Diagnosable Systems

Moo Wan KIM†, Hideo FUJIWARA†† and
Kozo KINOSHITA†††, *Regular Members*

あらまし　高信頼ディジタルシステムを実現する一つの方法として，Preparataらがグラフ理論的な立場から提案した自己診断システムがある．自己診断システムとは，他のユニットの状態を検査する能力を持つユニットの集合によって構成されるシステムである．従って，各ユニットを節点に，ユニット間の検査を有向枝に対応させることによって有向グラフで表現することができる．本論文では，同時に存在する故障ユニットの個数がある整数値Tを超えないという条件を満足する自己診断システム（T同時診断システム）を対象として，その値Tをシステムの診断能力を示す尺度と定義し，Tを増加させるためにどのような検査を新たに導入すればよいかという問題について考察を行った．更に，同じ方法を最適な1同時診断システムに繰り返し適用することによって，最適なT同時診断システムを組織的に求めることができることを示した．最後に，ユニットの故障確率を考慮したt確率的診断システムにおいて，診断能力の尺度をtと考え，このtを増加させる方法に関する考察も行った．

1．まえがき

近年，高信頼ディジタルシステムに対する要望がますます強まっているが，高信頼ディジタルシステムを実現する一つの方法としてPreparata ら[1]がグラフ理論的な立場から提案した自己診断システムがある．特に，最近の著しい回路の集積化の進展と共に，その有望性が高まり，多くの研究者によってこのシステムの実現を目指す考察が活発に行われている[1]〜[10]．

自己診断システムとは，他のユニットの状態を検査する能力を持つユニットの集合によって構成されるシステムである．従って，各ユニットを節点に，二つのユニットの間の検査を有向枝に対応させれば，これを1個の有向グラフで記述することができる．そして，検査ユニットは被検査ユニットの正常，故障状態に応じた2値の検査結果を出力するが，検査ユニットが故障している場合，その検査結果は信頼できなくなるので，検査結果を解析して一義的に故障ユニットをすべて検出できるようにするためには，システムにある種の制約を加えなければならない．現在最も一般的に認められているのは，システムに存在する故障ユニットの個数がある値Tを超えないという制約であり，この制約を満たすシステムをT同時診断システムと呼んでいる．自己診断システムがT同時診断システムであるための必要十分条件および検査数が最小であるという意味での最適なT同時診断システムの構成法の幾つかは既にPreparata ら[1]，Hakimi[2]，Allan[3]，香田[4]によって与えられている．

ところが，信頼性はシステムが具備すべき多くの評価尺度の一つに過ぎないので，システムを設計する際はいろいろな形の束縛の下でそれを行わざるを得ないと思われる．従って，自己診断システムを設計する際に生じる問題は，与えられたシステムを解析し，その診断能力を求め，求まった診断能力が十分満足するものでないとき，いかにすればそれを所望の値に達するようにするかということであろう．

本論文ではまずT同時診断システムを対象として，同時に発生する故障ユニットの個数の最大値Tを自己診断システムの診断能力の尺度と定義して，このTを

† 大阪大学大学院工学研究科電子工学専攻，吹田市
†† 大阪大学工学部電子工学科，吹田市
Faculty of Engineering, Osaka University, Suita-shi, 565 Japan
††† 広島大学総合科学部情報行動科学教室，広島市
Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University, Hiroshima-shi, 730 Japan
論文番号：昭55-43[D-13]

増加させる方法について考察する．更に，同じ方法を最適な1同時診断システムに繰り返し適用することによって最適なT同時診断システムを組織的に求めることができることを示す．最後に，ユニットの故障確率を考慮したt確率的診断システムにおいて，診断能力の尺度をtと考え，このtを改善させる方法について考察する．

2. T同時診断システム

本論文で用いる記法についてまず説明する．

$G=[V,E]$は自己診断システムを記述する診断グラフである．但し，Vはユニットの集合．Eは検査の集合でユニットv_iがユニットv_jを検査するとき及びそのときに限り，v_iからv_jへ向う枝$e=(v_i, v_j)$が存在する．

$\Gamma(X)=\{v\in V \mid (x, v)\in E\}-X$.

$\Gamma^{-1}(X)=\{v\in V \mid (v, x)\in E\}-X$.

$|X|$は集合Xの要素の数

$\lceil a\rceil$はaより小さくない最小整数

$\lfloor a\rfloor$はaより大きくない最大整数

をそれぞれ表している．

検査の結果は診断グラフGの枝に重み$\rho(v_i, v_j)$を割り当てることによって示し，ユニットv_iがユニットv_jを検査した結果，v_jを正常であると評価したことを$\rho(v_i, v_j)=0$，逆にv_jを故障であると評価したことを$\rho(v_i, v_j)=1$で表す．この重み$\rho(v_i, v_j)$の集合をシンドロームと呼ぶ．

このシンドロームにおいて，検査するユニットv_iが正常であればその検査結果は信頼できるが，v_iが故障している場合はその検査結果は信頼できず意味のないものと考える．そこで故障集合として考えてもこの立場に矛盾しないユニットの集合を無矛盾故障集合と呼ぶことにする．

［定義1］ 診断グラフ$G=[V,E]$とシンドローム$\rho=\{\rho(v_i, v_j) \mid (v_i, v_j)\in E\}$が与えられたとき，次の条件1，2を満たす$V$の部分集合$F$をシンドローム$\rho$に関する$G$の無矛盾故障集合という．

<条件1> $(v_i, v_j)\in E, v_i\in\bar{F}=V-F, v_j\in F$ なるすべてのv_i, v_jに対して，

$$\rho(v_i, v_j)=1.$$

<条件2> $(v_i, v_j)\in E, v_i, v_j\in\bar{F}$ なるすべてのv_i, v_jに対して，

$$\rho(v_i, v_j)=0.$$

いま定義した無矛盾故障集合を用いるとT同時診断システムを次のように定義できる．

［定義2］ 任意のシンドロームに対して，$|F|\leq T$となる無矛盾故障集合Fがたかだか一つしか存在しないとき，GはT同時診断システムであるという．

T同時診断システムであるための必要十分条件は今までに幾つか与えられている．そのうち本論文で行う議論に便利な形のものを以下の定理1として紹介するが，その前に定理に必要な定義を行う．

［定義3］ 次の条件を満たすVの分割$p=(X, Y, Z)$を診断分割と呼ぶ．

<条件> $|Z|\geq 1, \Gamma(X)=Y, \Gamma^{-1}(Z)=Y$.

Vの診断分割の集合を$P(G)$で表す．

［定義4］ 次の$\delta(p)$を診断分割$p=(X,Y,Z)$の診断指数と呼ぶ．$\delta(p)=|Y|+\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil$.

$\delta_m^G=\min_{p\in P(G)}\{\delta(p)\}$とし，診断指数が$\delta_m^G$となる診断分割を最小診断分割といい，それらの集合を$P_m(G)$とする．すなわち，$P_m(G)=\{p\in P(G) \mid \delta(p)=\delta_m^G\}$である．

［定理1］[(3)] 診断グラフ$G=[V,E]$がT同時診断システムであるための必要十分条件は，

$$T+1\leq\delta_m^G$$

である． （証明略）

TをT同時診断システムの診断能力を示す尺度と考え，以下，診断グラフGの診断指数と呼ぶ．

診断グラフ$G=[V,E]$には最小診断分割がちょうど1個存在するとする．これを$p=(X, Y, Z)$とし，更に$|Z|=1$あるいは$|Z|=2m$（但し，mは自然数とする）を満足しているとする．このGに関して，次のような枝eを定義する．すなわち，ある$x\in X$とある$z\in Z$を選び，$e=(x, z)$とする．Gにこの枝eを付加した診断グラフを$G'=[V, E\cup\{e\}]$とするとき，次の補題1が成り立つ．

［補題1］ G'の診断指数をT'とすると，

$$T'\geq T+1$$

である．

（証明） Gにおける最小診断分割である$p=(X, Y, Z)$は枝$e=(x, z)$を付加することによって診断分割でなくなる．

(1) $|Z|=1$の場合．

(i) $|X|\neq 1$ならば，次のような診断分割$p_1'=(X_1', Y_1', Z_1')$がpから新たに発生する．

$X_1'=X-\{x\}, Y_1'=Y\cup\{x\}, Z_1'=Z$

このとき，p_1'の診断指数$\delta(p_1')$を調べてみると，

$$\delta(p_1')=|Y_1'|+\left\lceil\frac{|Z_1'|}{2}\right\rceil=|Y|+1+\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil$$

$=\delta(p)+1=\delta_m^G+1$

G'の診断指数T'はG'の最小診断分割の診断指数$\delta_m^{G'}$が求まれば$T'=\delta_m^{G'}+1$より直ちに求めることができるが，診断分割pがG'においてはもはや診断分割でなくなっているので$\delta_m^{G'}\geqq\delta_m^G+1$ がいえる．このことと$\delta(p_1')=\delta_m^G+1$より診断分割$p_1'$は$G'$の最小診断分割の一つであることが分かり，$\delta_m^{G'}=\delta_m^G+1$となる．従って，$T'=T+1$である．

(ii)　$|X|=1$ ならば，pから新たに発生する診断分割は存在しなく，単にpがG'において診断分割でなくなる．従って，$\delta_m^{G'}\geqq\delta_m^G+1$しかいえないので，$T'\geqq T+1$ となる．

以上(i)，(ii)をまとめると，$T'\geqq T+1$ がいえる．

(2)　$|Z|=2m$ の場合．

(i)　$|X|\neq1$ ならば，前述の診断分割p_1'に加えてpから新たに次のような診断分割$p_2'=(X_2',Y_2',Z_2')$ が発生する．

$$X_2'=X,\ Y_2'=Y\cup\{z\},\ Z_2'=Z-\{z\}$$

p_2'の診断指数$\delta(p_2')$を調べると，

$\delta(p_2')=|Y_2'|+\left\lceil\frac{|Z_2'|}{2}\right\rceil=|Y|+1+\left\lceil\frac{|Z|-1}{2}\right\rceil$，$|Z|=2m$ であるから，$\left\lceil\frac{|Z|-1}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil$，従って，$\delta(p_2')=|Y|+1+\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil=\delta(p)+1$ となる．すなわち，診断分割p_1',p_2'は共にG'の最小診断分割であることが分かる．故に，$\delta_m^{G'}=\delta_m^G+1$となり$T'=T+1$ である．

(ii)　$|X|=1$ ならば，pから新たに発生する診断分割は(i)で述べたp_2'だけであるが，p_1'はG'の最小診断分割であるので，$\delta_m^{G'}=\delta_m^G+1$ がいえる．従って，$T'=T+1$ である．

以上(1)，(2)の議論をまとめると，$T'\geqq T+1$ となる．

（証明終）

ここで以下の議論が簡潔に行えるように，最小診断分割がちょうど1個存在する（それをpとする）診断グラフに，ある枝e_0あるいは枝集合E_0を付加することによって診断グラフの診断指数が増加すれば，このとき，枝e_0あるいは枝集合E_0が診断分割$p=(X,Y,Z)$を“被覆する”ということにする．

ここでの目的はGの診断指数Tを増加させるためにどのような枝を付加すればよいかを調べることであるが，このためには各$p\in P_m(G)$ を被覆する枝あるいは枝集合を求めればよいことが分かる．そこで，次に$|Z|=2m+1$ の場合の最小診断分割pを被覆する枝について考えてみよう．

$G=[V,E]$は最小診断分割がちょうど1個存在し（これを$p=(X,Y,Z)$ とする），$|Z|=2m+1$ である診断グラフとする．このGから次のような枝集合E_1を定義する．すなわち，ある$x_1,x_2\in X$ とある$z_1,z_2\in Z\ (z_1\neq z_2)$ を選び，

$$E_1=\{e_1=(x_1,z_1),e_2=(x_2,z_2)\}$$

とする．

ここで定義した枝集合E_1をGに付加した診断グラフを$G''=[V,E\cup E_1]$ とするとき，次の補題が成り立つ．

［補題2］　G''の診断指数をT''とすると，

$$T''\geqq T+1$$

である．

（証明）　補題1の場合と同様にGにおける最小診断分割$p=(X,Y,Z)$は枝集合$E_1=\{e_1,e_2\}$を付加することによって診断分割でなくなる．このとき，次に示す診断分割$p_i''=(X_i'',Y_i'',Z_i'')$，$(i=1,2,3)$ のうち少なくとも一つはpから新たに発生する．

(1)　$X_1''=X-\{x_1\}-\{x_2\}$，$Y_1''=Y\cup\{x_1\}\cup\{x_2\}$，$Z_1''=Z$．
この場合，$\delta(p_1'')=|Y_1''|+\left\lceil\frac{|Z_1''|}{2}\right\rceil=|Y|+2+\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil$

$$\geqq\delta(p)+1.$$

(2)　$X_2''=X-\{x_1\}$，$Y_2''=Y\cup\{x_1\}\cup\{z_1\}$，$Z_2''=Z-\{z_1\}$，
$|Z|=2m+1$ であるから，$\left\lceil\frac{|Z|-1}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil-1$．
従って，$\delta(p_2'')=|Y_2''|+\left\lceil\frac{|Z_2''|}{2}\right\rceil=\delta(p)+1$．

(3)　$X_3''=X$，$Y_3''=Y\cup\{z_1\}\cup\{z_2\}$，$Z_3''=Z-\{z_1\}-\{z_2\}$，
$\left\lceil\frac{|Z|-2}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{|Z|}{2}\right\rceil-1$ であるから，
$\delta(p_3'')=|Y_3''|+\left\lceil\frac{|Z_3''|}{2}\right\rceil=\delta(p)+1$．

以上いずれの場合においても$\delta(p_i'')\geqq\delta(p)+1$ が成り立つ．従って，$\delta_m^{G''}\geqq\delta_m^G+1$ となり$T''\geqq T+1$ である．

（証明終）

補題1，2より明らかなように，最小診断分割がちょうど1個存在する診断グラフGの診断指数を増加させるためには，1個または2個の枝を付加すれば十分であることが分かった．そこで，以下の議論においてこれらの二つの場合を統一的に述べるために二，三の定義を行う．

まず，2個の枝から成る枝集合$\{e_i,e_j\}$に複合枝e_{ij}なるものを対応させ，これを1個の枝とみなすようにする．次に，最小診断分割$p\in P_m(G)$を被覆する枝，あるいは複合枝の集合を$\varepsilon(p)$ で表す．又，逆に枝eによって被覆される最小診断分割の集合を$\varepsilon^{-1}(e)$で表す．すなわち，

$$\varepsilon^{-1}(e)=\{p_i\in P_m(G)/e\in\varepsilon(p_i)\}$$

更に複合枝e_{ij}に対しては

$$\varepsilon^{-1}(e_{ij})=\varepsilon^{-1}(e_i)\cup\varepsilon^{-1}(e_j)\cup\varepsilon^{-1}(\{e_i,e_j\})$$

とする．

但し，

$$\varepsilon^{-1}(\{e_i, e_j\})=\{p_k \in P_m(G) \mid e_{ij} \in \varepsilon(p_k)\}$$

である．

さて，任意の診断グラフGが与えられたとき，Gの各$p_i \in P_m(G)$を被覆する枝あるいは複合枝の集合をGに付加すればGのすべての最小診断分割は診断分割でなくなり，且つ各p_iから新たに発生する診断分割の診断指数はすべてδ_m^G+1より大きくなるのは以上の議論より明らかであるので次の定理2が成り立つ．

［定理2］ 診断グラフGの最小診断分割の集合を$P_m(G)=\{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$とする．$G$に枝集合$\tilde{E}=\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \cdots \cup \alpha_r$（但し，$\alpha_i$は$\varepsilon(p_i)$に属する任意の枝，あるいは複合枝）を付加した診断グラフ$\tilde{G}$の診断指数を$\tilde{T}$とすると，$\tilde{T} \geqq T+1$である．

（証明略）

定理2をもとにして，任意の診断グラフGの診断指数Tを増加させるための枝集合を求める手順を次に示そう．

［手順A］

(1) 与えられた$G=[V, E]$から$P_m(G)$とδ_m^Gを求める．

(2) 各$p_i \in P_m(G)$に対して，$\varepsilon(p_i)$を求める．

(3) 行列$M=(m_{ij})$をつくる．但し，行には$\varepsilon(p_i)$の要素である枝および複合枝を対応させ（これをα_iで表す），列には$P_m(G)$の各要素p_iを対応させ，$\varepsilon^{-1}(\alpha_i) \in p_j$のとき，$m_{ij}=1$とし，その他の場合は$m_{ij}=0$とする．

(4) 行列Mにおいて，すべての列を被覆する最小個の行の集合C_i（最小被覆）を一つ求める．但し，行が複合枝の場合は2個と数える．

［例1］ 図1に示す診断グラフ$G_0=[V, E_0]$に手順Aを適用してみる．まず，G_0から$P_m(G_0)$を求めると，表1が得られる．従って，G_0の診断指数T_0は$T_0=1$である．次に各$p_i \in P_m(G_0)$に対して$\varepsilon(p_i)$を求め，更にそれをもとに行列Mをつくり，最小被覆を一つ求めると，

$$C=\{(v_1, v_5), (v_4, v_3), (v_5, v_1), (v_5, v_2), (v_5, v_4)\}$$

が求まった．このCに対応する枝集合を付加したグラフ$G_{0A}=[V, E_0 \cup C]$は図2のようになる．（例終）

3. 最適システムの構成

前章では与えられた診断グラフの診断指数を増加させる方法について述べたが，この章では，同じ考えに

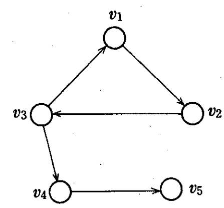


図1 診断グラフG_0
Fig. 1 - Diagnostic graph G_0.

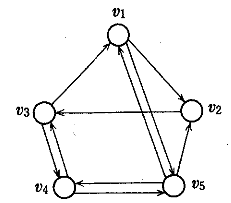


図2 診断グラフG_{0A}
Fig. 2 - Diagnostic graph G_{0A}

表1 $P_m(G_0)$

p_i	X	Y	Z
p_1	v_5	ϕ	v_1 v_2 v_3 v_4
p_2	v_1 v_2	v_3	v_4 v_5
p_3	v_1 v_5	v_2	v_3 v_4
p_4	v_2 v_5	v_3	v_1 v_4
p_5	v_4 v_5	ϕ	v_1 v_2 v_3
p_6	v_1 v_2 v_3	v_4	v_5
p_7	v_1 v_2 v_5	v_3	v_4
p_8	v_1 v_4 v_5	v_2	v_3
p_9	v_2 v_4 v_5	v_3	v_1
p_{10}	v_3 v_4 v_5	v_1	v_2

基づいて，最適なT同時診断システムを求める組織的方法について述べる．但し，ここでいう最適システムとは検査枝数が最小であるものを指しており，総ユニット数nのT同時診断システムは少なくともnT個の検査を必要とすることは既によく知られている事実なので，最適システムとは検査枝数nTのT同時診断システムのことである．まず，最適なT同時診断システムにちょうど$|V|=n$個の枝を付加することによってできる$T+1$同時診断システムの集合を求める手順を示す．

［手順B］

(1)から(3)までは前章の手順Aと同じである．

(4) 行列Mから最小被覆をすべて求め，この集合を$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_s\}$とする．最小被覆の要素数がちょうど$|V|=n$に等しい場合に限り次の(5)へ進む．

(5) 各最小被覆$C_i \in C$に対応する枝集合を付加したグラフの集合$g(G)=\{[V, E \cup C_j]\}$をつくる．

診断グラフGに手順Bを適用して求まる診断グラフの集合$g(G)=\{G_1^B, G_2^B, \cdots, G_s^B\}$に属する各グラフの診断指数をそれぞれ$T_1^B, T_2^B, \cdots, T_s^B$とするとき，次の補題3が成り立つ．

［補題3］ $G=[V, E]$が最適なT同時診断システムであるとすると，$T_1^B=T_2^B=\cdots=T_s^B=T+1$である．

（証明） 前章の議論から明らかに，$T_i^B \geqq T+1$（$i=1,\cdots,s$）が成り立つ．しかも手順Bの(4)の制約条件によって各G_i^Bの枝数はちょうど$(T+1)\cdot|V|$であるので$T_i^B \leqq T+1$となる．従って，$T_i^B=T+1$である．

（証明終）

診断グラフGに手順Bを適用して求まる$g(G)$の各グラフにそれぞれもう一度手順Bを繰り返し適用して得られるグラフの集合を$g^2(G)$と表し，これを

$$G \overset{B}{\Rightarrow} g(G) \overset{B}{\Rightarrow} g^2(G)$$

あるいは単に，

$$G \overset{B^2}{\Rightarrow} g^2(G)$$

とかく．一般にGにk回手順Bを繰り返し適用して得られるグラフの集合を$g^k(G)$とし，$G \overset{B^k}{\Rightarrow} g^k(G)$とかくことにする．又，$|V|=n$の最適な$K$同時診断システムの全体を$g_n^K$とする．次の定理3は最適な1同時診断システムに手順Bを$T-1$回繰り返し適用することによって最適なT同時診断システムが求まることを示している．

［定理3］ $g_n^1=\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$とするとき，$g_n^T \supseteq g^{T-1}(G_1)\cup g^{T-1}(G_2)\cup\cdots\cup g^{T-1}(G_n) \neq \phi$が成立する．

（証明） もし$g^{T-1}(G_1)\cup g^{T-1}(G_2)\cup\cdots\cup g^{T-1}(G_n)$に属するグラフ$G^*=[V,E^*]$が存在するならば，補題3より$G^*$は最適な$T$同時診断システムである．従って，問題となるのは果たしてそのような診断グラフG^*が存在するかどうかであるが，ここではPreparataの$D_{\delta T}$システム[1]がG^*になることを示す．これを示すためには$D_{\delta T}$システムがすべてグラフ的にD_{1T}システムと同形であるので，D_{1T}システム（$T \geqq 1$）に手順Bを適用したとき生成されるグラフの集合に$D_{1(T+1)}$が含まれるということ，すなわち，$D_{1(T+1)} \in g(D_{1T})$が成立することを示せばよい．

まず，D_{1T}システム$=[V,E]$の$P_m(D_{1T})$を求める．D_{1T}システムの性質を考慮すると，D_{1T}システムの$P_m(D_{1T})$は次の$2n$個（$|V|=n$）であることが分かる．

$P_m=\{p_1^1,p_1^2,p_2^1,p_2^2,\cdots,p_n^1,p_n^2\}$,

$p_i^\lambda=(X_i^\lambda,Y_i^\lambda,Z_i^\lambda)$，（$\lambda=1,2$）とすると，

$X_i^1=\{v_i,v_{i+1},\cdots,v_{i+a}\}$, $X_i^2=\{v_i,v_{i+1},\cdots,v_{i+a-1}\}$,

$Y_i^1=\{v_{i+a+1},\cdots,v_{i+a+T}\}$, $Y_i^2=\{v_{i+a},\cdots,v_{i+a+T-1}\}$,

$Z_i^1=\{v_{i-1}\}$, $Z_i^2=\{v_{i-2},v_{i-1}\}$

但し，$a=n-T-2$であり，添字はすべて$\bmod n$で表している．このとき，枝$e_i=(v_i,v_{i+T+1})$が被覆する最小診断分割を求めてみると，$\varepsilon^{-1}(e_i)=\{p_{i-a}^1,p_{i-a+1}^2\}$である．従って，枝集合$E_0=\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\}$は最小診断分割の集合$P_m(D_{1T})$を被覆する．又，$|E_0|=n$．故に，$[V,E\cup E.]=D_{1(T+1)}\in g(D_{1T})$が成立する．

（証明終）

最適なT同時診断システムの構成法としては，$D_{\delta T}$システムあるいは香田の求めた最適システム[4]などが現在までに知られており，更に，坂内，猪瀬[8]によって最適T同時診断システムの必要十分条件も既に求まっている．定理3ではここで呈示した手法によって，少なくとも$D_{\delta T}$システムは生成されるということを示しているが，$g^{T-1}(G_1)\cup\cdots\cup g^{T-1}(G_n)$と$g_n^T$の関係については具体的に示していない．しかし，$g_5^1$に手順Bを適用した結果，現在までに知られている構成法によるシステムがすべて生成されたこと，及び従来知られていなかった多くのシステムが生成されたことが確認できたので，$g^{T-1}(G_1)\cup\cdots\cup g^{T-1}(G_n)$は$g_n^T$のかなり大きな部分を網羅していると予想できる．そこで，グラフ的に同形でないg_n^1の元をすべて効率よく求めることも必要になってくるが，これらの問題に関する詳細な考察は別の機会にゆずることにする．

［例2］ $G_1\in g_5^1$に手順Bを適用してみる．g_5^1の元のうちグラフ的に同形でないものは図3に示す四つだけである．G_1として$G_a=[V,E_a]$を選び手順Bを適用し，求まった結果のうち従来知られていなかった診断グラフを一つ示すと，

$C_1=\{(v_1,v_4),(v_4,v_1),(v_4,v_2),(v_3,v_5),(v_5,v_3)\}$

$G_{a1}=[V,E_a\cup C_1]$であり，$G_{a1}\in g(G_a)$は図4のようになる．

（例終）

次に，ここで$g^T(G)$を調べる過程で見つけた新しい

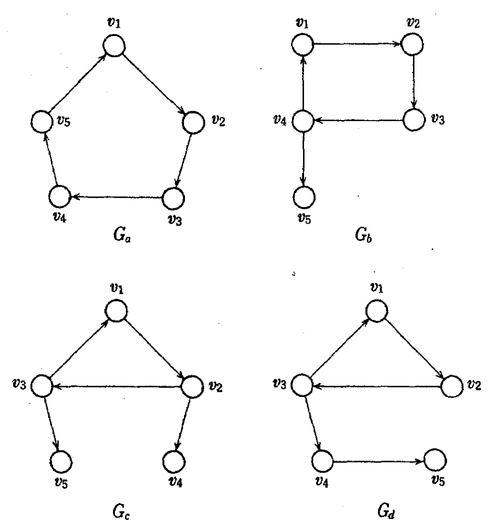


図3 g_5^1に属する診断グラフ
Fig.3-Diagnostic graphs in g_5^1.

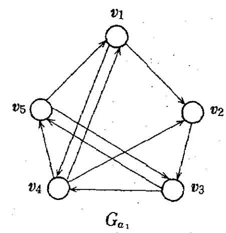
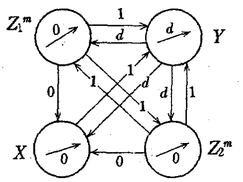


図4　診断グラフ G_{a1}
Fig.4-Diagnostic graph G_{a1}.



dは1,0どちらでもかまわないことを示す

図5　シンドローム ρ_0
Fig.5-Syndrome ρ_0.

最適システムの構成法を一つ紹介する．

［定義5］　各 $v_i \in V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ に対して，$\Gamma(v_i)=\{v_{i+\lceil\frac{T}{2}\rceil}, \cdots, v_{i+1}, v_{i-1}, \cdots, v_{i-\lfloor\frac{T}{2}\rfloor}\}$となる診断グラフを$K_T$システムとする．但し，添字はすべてmod$n$で表している．

［定理4］

(1)　$K_T=[V, E]\in g_n^T$

(2)　$T \geqq 2$ のとき，$K_T \in g(K_{T-1})$

（証明）　K_Tシステムの$P_m(K_T)$ は定義より，次の$2n$ 個（$|V|=n$）である．

$P_m(K_T)=\{p_1^1, p_1^2, \cdots, p_n^1, p_n^2\}$,

$p_i^\lambda=(X_i^\lambda, Y_i^\lambda, Z_i^\lambda)$,（$\lambda=1,2$）とすると，

$X_i^1=\{v_i, v_{i+1}, \cdots, v_{i+a}\}$, $X_i^2=\{v_i, v_{i+1}, \cdots, v_{i+a-1}\}$,

$Y_i^1=\{v_{i-\lfloor\frac{T}{2}\rfloor}, \cdots, v_{i-1}, v_{i+a+1}, \cdots, v_{i+a+\lceil\frac{T}{2}\rceil}\}$,

$Y_i^2=\{v_{i-\lfloor\frac{T}{2}\rfloor}, \cdots, v_{i-1}, v_{i+a}, \cdots, v_{i+a+\lceil\frac{T}{2}\rceil-1}\}$,

$Z_i^1=\{v_{i+a+\lceil\frac{T}{2}\rceil+1}\}$, $Z_i^2=\{v_{i+a+\lceil\frac{T}{2}\rceil}, v_{i+a+\lceil\frac{T}{2}\rceil+1}\}$,

但し，$a=n-T-2$　である．

(1)　$$\delta(p_i^1)=\delta(p_i^2)=|Y_i^1|+\left\lceil\frac{|Z_i^1|}{2}\right\rceil=\left\lfloor\frac{T}{2}\right\rfloor+\left\lceil\frac{T}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{|Z_i|}{2}\right\rceil=T+1 .$$

又，$|E|=nT$．従って，$K_T \in g_n^T$である．

(2)　(i)$T=2m$（m：自然数）のとき，

枝 $e_i=(v_i, v_{i-\lfloor\frac{T}{2}\rfloor})$が被覆する最小診断分割の集合 $\varepsilon^{-1}(e_i)$を求めると，$\varepsilon^{-1}(e_i)=\{p_i^1, p_i^2\}$ である．従って，枝集合 $E_0=\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\}$ は $P_m(K_T)$ を被覆する．

(ii)　$T=2m+1$ のとき，同様に枝 $e_j=(v_j, v_{j+\lceil\frac{T}{2}\rceil})$ の $\varepsilon^{-1}(e_j)$ を求めると，$\varepsilon^{-1}(e_j)=\{p_{j-a}^1, p_{j-a+1}^2\}$である．

以上(i)，(ii)をまとめると，$K_T \in g(K_{T-1})$ が成立する．

（証明終）

4.　t 確率的診断システム

自己診断システムを構成するユニットは他のユニットを検査する能力を持っているが必ずしも同一である必要はない．従って，ユニットの信頼性は一般にすべて同等であるとみなすことができない．このような観点からMaheshwariら[5]はユニットの故障生起確率に基づく診断能力の尺度 t を導入し，システムがグラフ理論的モデルにおいて，確率的に t 診断可能であるための必要十分条件を呈示した．本章では，この確率を考慮に入れた自己診断システムにおいて，診断能力の尺度を t と考え，この t を改善させる方法について考察を行う．

各節点v_iに$W(v_i)=\log[(1-p(v_i)/p(v_i)]$ を重みとして付加した診断グラフを$G_W=[V, E]$ とする．但し，ユニットv_iの故障確率の値を $p(v_i)$ とする．各ユニットの故障は互いに独立であるという仮定を設けると，任意の節点の部分集合Fが故障集合である確率$W(F)$は次のようになる．$W(F)=\sum_{v_i\in F} W(v_i)$．

［定義6］　任意のシンドロームに対して，$W(F)<K(t)$ なる無矛盾故障集合Fがたかだか一つしか存在しないとき，G_Wは t 確率的診断システムであるという．

但し，$K(t)=-\log t+\sum_{v_i\in V}\log(1-p(v_i))$である．

［定義7］　次の条件を満たすVの分割 $q=(X, Y, Z)$ を確率を考慮したときの診断分割とする．

＜条件＞　$|Z|\geqq 1$，$\Gamma(X)\subseteq Y$，$X=V-Y-Z$．

診断分割の集合を$Q(G_W)$で表す．

［定義8］　各診断分割 $q=(X, Y, Z)\in Q(G_W)$ に対して，確率診断指数 $\varDelta(q)$ を次のように定義する．

$$\varDelta(q)=W(Y)+S(Z)$$

但し，(1)　$|Z|=1$ の場合，$S(Z)=W(Z)$ とし，

(2)　$|Z|\neq 1$ の場合，Zの2分割 (Z_1^i, Z_2^i)をすべて考え，$S(Z)=\min_i\{\max(W(Z_1^i), W(Z_2^i))\}$ とする．

t 確率的診断システムであるための必要十分条件は既に示されているが，本論文の議論に便利と思われる別な必要十分条件を次に示そう．

［定理5］　診断グラフ $G_W=[V, E]$ が t 確率的診断システムであるための必要十分条件は，

$K(t)\leqq \min_{q\in Q(G_W)}\{\varDelta(q)\}=\varDelta_m$ である．

（証明）（必要）　もし$K(t)>\varDelta_m$ ならば，図5に示すシンドロームρ_0に対して次のような$K(t)$ よりその故障確率が小さい二つの無矛盾故障集合F_1, F_2が存在する．$F_1=Y\cup Z_1^m, F_2=Y\cup Z_2^m$．但し，$\varDelta_m$となる$Z$の2分割を (Z_1^m, Z_2^m) とし，$W(Z_1^m)\geqq W(Z_2^m)$ であるとする．

（十分）　G_Wが t 確率的診断システムでないとすると，$K(t)$ より小さい無矛盾故障集合が二つ以上存在することになる．そのうちの二つをF_1, F_2 とし，$Y=$

$F_1 \cap F_2, Z_1=F_1-Y, Z_2=F_2-Y, Z=Z_1 \cup Z_2, X=V-Y-Z$ とすると，$x \in X, z \in Z$ なる枝 (x,z) は存在しないので，分割 $q=(X,Y,Z)$ は診断分割である．しかも $W(Y)+W(Z_1)<K(t)$，$W(Y)+W(Z_2)<K(t)$ であり，$W(Z_1) \geqq W(Z_2)$ とすると，$\varDelta(q)=W(Y)+S(Z) \leqq W(Y)+W(Z_1)<K(t) \leqq \varDelta_m$ となり矛盾が生じる．

（証明終）

以下，$K(t)$ を診断グラフ G_W の確率診断指数と呼ぼう．

いまある診断分割 $q=(X,Y,Z)$ に注目し，この q に次のように定義される枝 e を付加する．すなわち，ある $x \in X$ とある $z \in Z$ を選び，$e=(x,z)$ とする．このとき，q から新たに発生する診断分割のうちその確率診断指数が最も小さい診断分割を $q_0'=(X_0',Y_0',Z_0')$ とすると，次の補題が成立する．

［補題4］ 診断分割 q_0' の確率診断指数を $\varDelta(q_0')$ とすると，

(1) $|Z|=1$ のとき，$\varDelta(q_0')=W(x)+\varDelta(q)$

(2) $|Z| \neq 1$ のとき，$\varDelta(q_0')=\min\{W(x), S(Z-\{z\})+W(z)-S(Z)\}+\varDelta(q)$ である．

（証明） q は枝 e が付加されて診断分割でなくなる．

(1) $|Z|=1$ の場合，次の診断分割 $q_1'=(X_1',Y_1',Z_1')$ だけが q から新たに発生する．

$$X_1'=X-\{x\},\ Y_1'=Y \cup \{x\},\ Z_1'=Z$$

従って，

$$\varDelta(q_0')=\varDelta(q_1')=W(Y_1')+S(Z_1')=W(x)+\varDelta(q)$$

となる．

(2) $|Z| \neq 1$ の場合，(1)の q_1' に加えて次の診断分割 $q_2'=(X_2',Y_2',Z_2')$ も新たに q から発生する．

$$X_2'=X,\ Y_2'=Y \cup \{z\},\ Z_2'=Z-\{z\}$$

そして，

$$\varDelta(q_2')=W(Y_2')+S(Z_2')=W(Y)+S(Z-\{z\})+W(z)$$

従って，

$$\varDelta(q_0')=\min\{\varDelta(q_1'), \varDelta(q_2')\}$$

となる．

（証明終）

ここで以下の記述を簡潔にするために，

$$H(q_i,x,z)=\begin{cases} W(x) & (|Z|=1 \text{ のとき}) \\ \min\{W(x), S(Z-\{z\})+W(z)-S(Z)\} & (|z| \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする．

補題4に基づいて，診断グラフ G_W の確率診断指数 $K(t)$ を $K(t')$ にまで増加させるための枝集合を求める手順を次に示そう．

［手順C］

(1) 診断グラフ G_W と目的値 $K(t')$ から $\varDelta_m$ 及び $Q_t(G_W)$ を求める．但し，$Q_t(G_W)=\{q_i \in Q(G_W) \mid \varDelta(q_i)<K(t')\}$ である．

(2) 各 $q_i \in Q_t(G_W)$ に対して，$\sigma_i=K(t')-\varDelta(q_i)$ を求め，$H(q_i,x,z) \geqq \sigma_i$ を満たす枝集合 $\varepsilon(q_i)=\{(x,z)\}$ を求める．

(3) 行列 $N=(n_{ij})$ をつくる．但し，行には $\varepsilon(q_l)$ の要素 e_i を，列には $q_l \in Q_t(G_W)$ を対応させ，$e_i \in \varepsilon(q_i)$ のときに限り $n_{ij}=1$ とし，その他の場合は $n_{ij}=0$ とする．

(4) 行列 N において，すべての列を被覆する最小個の行の集合 D（最小被覆）を一つ求める．

ここで手順Cの計算手数について考えてみると，ユニットの個数が増加するにつれて，その手数は指数関数的に増加する．しかし，ユニットの個数が比較的少ない（例えば数十程度）システムには手順Cの適用が十分可能であると思われる．ところで，手順Cの計算手数は手順Cの(1)における各診断分割 q_i の確率診断指数 $\varDelta(q)$ を求める計算手数と(2)における $H(q_i,x,z)$ を求める計算手数に相当大きく依存している．更にこれらは共に $S(Z)$ の計算手数の大きさによっているので，冗長な枝を含むことにはなるが，$S(Z)$ の計算を簡便にした次のような近似的な手順を示すことができる．

まず，診断分割 $q=(X,Y,Z)$ に対して，$S(Z)$ に代って，$W(Z)/2$ を代入した擬確率診断指数 $\tilde{\varDelta}(q)=W(Y)+[W(Z)/2]$ というものを考える．このとき，$[W(Z)/2] \leqq S(Z)$ より $\tilde{\varDelta}(q) \leqq \varDelta(q)$ となる．

［手順C′］

(1) G_W から $\tilde{Q}_t(G_W)$ を求める．但し，$\tilde{Q}_t(G_W)=\{q_i \in Q(G_W) \mid \tilde{\varDelta}(q_i)<K(t')\}$ である．

(2) 各 $q_i \in \tilde{Q}_t(G_W)$ に対して，$\tilde{\sigma}_i=K(t')-\tilde{\varDelta}(q_i)$ を求め，$\tilde{H}(q_i,x,z) \geqq \tilde{\sigma}_i$ を満たす枝集合 $\tilde{\varepsilon}(q_i)=\{(x,z)\}$ を求める．但し，$\tilde{H}(q_i,x,z)=\min(W(x),W(z)/2)$ とする．

(3) 行列 $\tilde{N}=(\tilde{n}_{ij})$ をつくる．但し，行には $\tilde{\varepsilon}(q_l)$ の要素 e_i を列には $q_l \in \tilde{Q}_t(G_W)$ を対応させ，$e_i \in \tilde{\varepsilon}(q_j)$ のときに限り $\tilde{n}_{ij}=1$ とし，その他の場合は $\tilde{n}_{ij}=0$ とする．

(4) 行列 $\tilde{N}$ において，すべての列を被覆する最小個の行の集合 $\tilde{D}$（最小被覆）を一つ求める．

G_W に手順C′を適用して求まった $\tilde{G}_W=[V,E \cup \tilde{D}]$ の確率診断指数を $K(\tilde{t})$ とすると，$\tilde{Q}_t(G_W) \supseteq Q_t(G_W)$，

$\tilde{H}(q_i, x, z) \leqq H(q_i, xz)$ より $K(\tilde{t}) \geqq K(t')$ がいえる．

5. む す び

本論文では自己診断システムの診断能力を改善する方法および最適な自己診断システムを求める方法について考察を行った．

まず，T 個までの多重故障を許す T 同時診断システムを記述する診断グラフが与えられたとき，T を診断能力の尺度と考え，適当な枝集合を付加すれば T が増加することを示し，且つ，そのような枝集合を求める方法を示した．更に，同じ方法を最適な1同時診断システムに繰り返し適用すれば最適な T 同時診断システムが組織的に求まることを示し，同時に，従来知られていなかった新しい最適な T 同時診断システムの構成法を一つ示した．最後に，ユニットの故障確率を考慮に入れた t 確率的診断システムを記述する重みつき診断グラフが与えられたとき，同様な考えに基づいて，t を診断能力の尺度と考え，適当な枝集合を付加すれば t が目的値 t' まで改善することを示し，且つそのような枝集合を求める方法を示した．

本論文の対象とした Preparata らの自己診断システムを一般化した Russell と Kime の自己診断システムにおいてもその診断能力を改善させる方法について同様な議論をすることができるが，これは別の機会に譲ることにする．

謝辞　末筆ながら，日ごろ御指導頂く本学の尾崎弘教授，ならびに御討論頂いた尾崎研究室の諸氏に深謝します．

文　　献

(1) Preparata, F.P., Metze, G. and Chien, R.T.: "On the connection assignment problem of diagnosable systems", IEEE Trans. Electron. Comput., EC-16, p.848 (Dec. 1967).
(2) Hakimi, S.L. and Amin, A.T.: "Characterization of connection assignment of diagnosable systems", IEEE Trans. Comput., C-23, p.86 (Jan. 1974).
(3) Allan, F.J., Kameda, T. and Toida, S.: "An approach to the diagnosability analysis of a system", IEEE Trans. Comput., C-24, p.1040 (Oct. 1975).
(4) 香田徹：" t 重故障同時診断可能システム"，信学論(D)，J61-D, 9, p.680 (昭53-09).
(5) Maeshwari, S.N. and Hakimi, S.L.: "On models for diagnosable system and probabilistic fault diagnosis", IEEE Trans. Comput., C-25, p. 228 (Jan. 1976).
(6) Toida, S.: "System diagnosis and redundant tests", IEEE Trans. Comput., C-25, p.1167 (Nov. 1976).
(7) 金，藤原，樹下："確率的診断可能なシステムの構成について"，信学論(D)，J60-D, 9, p.750 (昭52-09).
(8) 坂内，猪瀬："自己系診断性の解析と診断可能なシステム構成"，信学会電子計算機研資，EC72-13 (1972-07).
(9) 藤原，樹下："システム診断における計算複雑度について"，信学技報，EC77-8 (1977-05).
(10) 阿江，大崎："自己診断システムにおけるネットワーク構造と計算複雑さ"，信学論(D)，J62-D, 2, p.126 (昭54-02).

(昭和54年6月26日受付，9月7日再受付)