論　文

UDC 510.65：681.325.6.001.4

変数縮退に関して閉じた論理関数族と故障検査への応用

正員 藤原 秀雄† 　　正員 尾崎 弘†

Classes of Logical Functions Closed under Variable Degeneration and Application to Fault Detection

Hideo FUJIWARA† and Hiroshi OZAKI†, *Regular Members*

あらまし 論理関数の合成に関して閉じた論理関数族を求める問題は重要な問題として古くから研究されている．本論文では，論理関数の変数に代入する論理関数として定数関数0，1と恒等関数xだけに制限した合成を変数縮退と呼び，変数縮退に関して閉じた論理関数族の性質を調べ，それらの閉論理関数族を分類する．更に，変数縮退に関して閉じた関数族は縮退故障に関して閉じた関数族と等価であることを示し，故障に関する閉包という性質が論理回路の故障検査にどのように応用されるかについて考察する．故障検査が容易ではあるが合成に関して閉じていない関数族としてユネイト関数族がある．しかし，ユネイト関数族もある制限の下での合成に関しては閉じていることを明らかにし，その合成の下での変数縮退に関してはユネイト関数族も閉論理関数族になることから縮退故障に関して閉じた論理関数族であることを示す．

1. まえがき

論理関数の集合（論理関数族）のうちで関数の合成によって閉じた集合を求める問題は，論理関数の分類や，万能な論理素子集合を選ぶ完全性の問題などに関連があり，古くから重要な問題として研究されている[1],[2]．合成に関する閉じた論理関数族の分類は，2値論理の場合完全に解かれており，Kuntzmann[1]の詳しい図解つきの紹介がある．

合成に関する閉包を論じる場合，論理関数の変数に他の論理関数を代入するという合成操作を考えるわけであるが，このとき論理関数の変数には定数関数0，1と恒等関数xだけしか代入できないという制限を置いた合成を考えることができる．論理関数の変数に定数関数や恒等関数を代入する合成操作を変数縮退と呼び，この合成操作だけで閉じている論理関数族を変数縮退に関して閉じた論理関数族と呼ぶことにする．

本論文では，まず変数縮退に関して閉じた論理関数族の性質を調べ，それらの閉論理関数族としてどのようなものがあるかを明らかにする．変数に0や1を代入して得られる論理関数は，その変数が0や1に縮退故障した故障関数を表している．縮退故障に関して閉じた論理関数族を定義することにより，変数縮退に関して閉じた関数族と等価であることを示すことができる．従って，変数縮退に関して閉じた関数族を分類しその性質を明らかにすることにより，縮退故障に関して閉じた関数族としてどのようなものがあるかを明らかにし，故障に関する閉包という性質が論理回路の故障検査にどのように応用されるかについて考察する．ユネイト関数族は一般の合成に関して閉じていないが，ある制限の下での合成に関しては閉じていることを示し，その合成の下での変数縮退に関しては，ユネイト関数族も閉論理関数族になることから，縮退故障に関して閉じた関数族であることを示す．

2. 諸定義と準備

すべてのn変数論理関数の集合をΩ_nで表すと，すべての論理関数の集合は

$$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$$

と表現される．1変数論理関数の集合は

$$\Omega_1=\{0,1,x,\bar{x}\}$$

†大阪大学工学部電子工学科，吹田市
Faculty of Engineering, Osaka University, Suita-shi, 565 Japan
論文番号：昭55-201[D-44]

である．

f を p 変数論理関数，$\mathcal{G}$ を論理関数の集合とする．f と，$g_{i1}, g_{i2}, \cdots, g_{ip} \in \mathcal{G} \cup \{x\}$ から次のように表現される論理関数 h を f と $\mathcal{G}$ から合成される論理関数であるという．

$$h(x_1, \cdots, x_n) = f(g_{i_1}(x_{t(1,1)}, \cdots, x_{t(1,n_i)}), \cdots, g_{i_p}(x_{t(p,1)}, \cdots, x_{t(p,n_p)}))$$

ここで，各 $x_{t(i,j)}$ は，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ から選ぶ．

f と $\mathcal{G}$ から合成されるすべての論理関数の集合を

$$f \otimes \mathcal{G}$$

で表す．又，論理関数の集合 $\mathcal{F}$ に対して

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f \otimes \mathcal{G}$$

と定義する．この合成操作を繰り返すことにより，論理関数の集合 $\mathcal{F}$ の閉包 $\overline{\mathcal{F}}$ を次のように帰納的に定義する．

$$\mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{F} \otimes \{x\}$$

$$\mathcal{F}^{(n)} = \mathcal{F}^{(n-1)} \otimes \mathcal{F}^{(1)}$$

$$\overline{\mathcal{F}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}$$

論理関数の集合 $\mathcal{F}$ とその閉包 $\overline{\mathcal{F}}$ が等しいとき，$\mathcal{F}$ は合成に関して閉じた論理関数族という．

論理関数 f の変数に代入する関数を定数関数 0，1 と恒等関数 x だけに制限したときの合成を変数縮退と呼ぶ．

$\mathcal{R} \subseteq \{0, 1\}$ について

$$\mathcal{F}^{\mathcal{R}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{R}$$

と定義し

$$\mathcal{F}^{\mathcal{R}} = \mathcal{F}$$

となる論理関数族 $\mathcal{F}$ を変数縮退 $\mathcal{R}$ に関して閉じた論理関数族という．

p 変数論理関数 f と，1 変数論理関数 $g_1, \cdots, g_p$ から，

$$h(x) = f(g_1(x), \cdots, g_p(x))$$

によって定義される 1 変数論理関数 h を

$$f(g_1 \times \cdots \times g_p)$$

で表す．p 変数論理関数 f に Ω_1 の部分集合 G に属する関数を代入して得られる 1 変数論理関数全体の集合を $f \circ G$ で表し，

$$f \circ G = \{f(g_1 \times \cdots \times g_p) \in \Omega_1 \,;\, g_1, \cdots, g_p \in G\}$$

で定義する．

合成に関して意味のある論理関数の集合を取り扱う立場から，以下では対象とする論理関数族は恒等関数 x を含むものとする．又，論理関数のことを単に関数と呼ぶことにする．

合成に関して閉じた関数族 $\mathcal{F} \subseteq \Omega$ は第 1 種関数族と第 2 種関数族に分けられるが[(2)]，ここでは変数縮退に関して閉じた関数族を考えるために，更に 3 種類の関数族を追加し，次に示す 5 種類の関数族を考える．

(1) 第 1 種関数族

$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$，$\mathcal{F} \cap \Omega_1 \neq \Omega_1$

(2) 第 2 種関数族

$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$，$\mathcal{F} \cap \Omega_1 = \Omega_1$

(3) 第 3 種関数族

$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$，$\mathcal{F} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$

(4) 第 4 種関数族

$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$，$\mathcal{F} \cap \{0\} = \{0\}$

(5) 第 5 種関数族

$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$，$\mathcal{F} \cap \{1\} = \{1\}$

第 1 種，第 2 種関数族については詳しく研究されている．第 1 種関数族は無数に存在し，第 2 種関数族は $\Omega, \overline{\Omega}_1$，と線形関数族だけである[(2)]．各種関数族の性質を述べるまえに，論理関数の非完全極大集合[(2)]を次に示す．

$\mathfrak{M}_1 = \{f \in \Omega \,;\, f(0, 0, \cdots, 0) = 0\}$

$\mathfrak{M}_2 = \{f \in \Omega \,;\, f(1, 1, \cdots, 1) = 1\}$

$\mathfrak{M}_3 = \{f \in \Omega \,;\, f$ は自己双対関数 $\}$

$\mathfrak{M}_4 = \{f \in \Omega \,;\, f$ は線形関数 $\}$

$\mathfrak{M}_5 = \{f \in \Omega \,;\, f$ は単調増大関数 $\}$

3. 変数縮退に関する閉論理関数族

ここでは，合成に関して閉じた関数族を対象に，変数縮退に関して閉じた関数族としてどのようなものがあるかを明らかにする．まず，ある関数集合が変数縮退に関して閉じた関数族であるための必要十分条件を次に示す．

〔定理 1〕 $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$，$\mathcal{R} \subseteq \{0, 1\}$ に対して

$$\mathcal{F}^{\mathcal{R}} = \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \supseteq \mathcal{R}$$

（証明） （必要条件）

$x \in \mathcal{F}$ であるから

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{R} \supseteq x \otimes \mathcal{R}$$

一方，

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\mathcal{R}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{R}$$

従って，

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{R} \supseteq x \otimes \mathcal{R} \supseteq \mathcal{R}$$

となる．

（十分条件）

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \supseteq \mathcal{F} \otimes \mathcal{R} \supseteq \mathcal{F}$$

従って，

$$\mathscr{F}=\mathscr{F}\otimes\mathscr{R}=\mathscr{F}^{\mathscr{R}}$$

となる．　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

定理1により，合成に関して閉じた関数族 $\bar{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$ においては，変数縮退 $\{0,1\}$ で閉じた関数族と第3種関数族は同じものであることが分かる．又，変数縮退 $\{0\}$ で閉じた関数族は第4種関数族と一致し，変数縮退 $\{1\}$ で閉じた関数族は第5種関数族と一致する．従って，変数縮退に関して閉じた関数族としてどのようなものがあるかを明らかにするには，第3種，第4種，第5種関数族を調べればよいことになる．

極大関数族 $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_5$ に関して次の補題が成立する(2)．

〔補題1〕(2)

$$\mathfrak{M}_1=\{f\in\Omega\,;\,f\circ\{0,x\}\subseteq\{0,x\}\}$$
$$\mathfrak{M}_2=\{f\in\Omega\,;\,f\circ\{1,x\}\subseteq\{1,x\}\}$$
$$\mathfrak{M}_3=\{f\in\Omega\,;\,f\circ\{x,\bar{x}\}\subseteq\{x,\bar{x}\}\}$$
$$\mathfrak{M}_5=\{f\in\Omega\,;\,f\circ\{0,1,x\}\subseteq\{0,1,x\}\}$$

〔定理2〕 $\bar{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$ に対して

(1) $0,1,\bar{x}\in\mathscr{F}\Leftrightarrow\mathscr{F}=\Omega$ 又は $\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_4$

(2) $0,1\in\mathscr{F}$, $\bar{x}\notin\mathscr{F}\Rightarrow\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_5$

(3) $0\in\mathscr{F}$, $1\notin\mathscr{F}\Rightarrow\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_1$

(4) $0\notin\mathscr{F}$, $1\in\mathscr{F}\Rightarrow\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_2$

(5) $0,1\notin\mathscr{F}$, $\bar{x}\in\mathscr{F}\Leftrightarrow\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_3$

（証明）

(1) $\mathscr{F}=\Omega$ 又は $\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_4$ ならば明らかに

$$0,1,\bar{x}\in\mathscr{F}$$

逆に，$0,1,\bar{x}\in\mathscr{F}$ ならば，$\mathscr{F}$ は第2種関数族であり，$\mathscr{F}=\Omega$ 又は $\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_4$ である．

(2) $0,1\in\mathscr{F}$, $\bar{x}\notin\mathscr{F}$ とする．

$f\in\mathscr{F}$ に対して

$$f\circ\{0,1,x\}\subseteq\bar{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$$
$$f\circ\{0,1,x\}\subseteq\Omega_1$$

故に，

$$f\circ\{0,1,x\}\subseteq\mathscr{F}\cap\Omega_1=\{0,1,x\}$$

一方，補題1より

$$\mathfrak{M}_5=\{f\in\Omega\,;\,f\circ\{0,1,x\}\subseteq\{0,1,x\}\}$$

であるので

$$f\in\mathfrak{M}_5$$

となる．従って，

$$\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_5$$

(3) $0\in\mathscr{F}$, $1\notin\mathscr{F}$ とする．

もし，$\bar{x}\in\mathscr{F}$ とすれば

$$\bar{x}\circ\{0\}=1\in\mathscr{F}$$

となり，$1\notin\mathscr{F}$ に矛盾する．従って，$\bar{x}\notin\mathscr{F}$ である．

$0,x\in\mathscr{F}$ であるので

$$\mathscr{F}\circ\{0,x\}\subseteq\bar{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$$
$$\mathscr{F}\circ\{0,x\}\subseteq\Omega_1$$

故に，

$$\mathscr{F}\circ\{0,x\}\subseteq\mathscr{F}\cap\Omega_1=\{0,x\}$$

となる．一方，補題1より

$$\mathfrak{M}_1=\{f\in\Omega\,;\,f\circ\{0,x\}\subseteq\{0,x\}\}$$

であるので，

$$\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_1$$

である．

(4) (3)と同様に証明可能．

(5) $0,1\notin\mathscr{F}$, $\bar{x}\in\mathscr{F}$ とする．

任意の $f\in\mathscr{F}$ に対して

$$f\circ\{x,\bar{x}\}\subseteq\Omega_1$$
$$f\circ\{x,\bar{x}\}\subseteq\bar{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$$

故に，

$$f\circ\{x,\bar{x}\}\subseteq\mathscr{F}\cap\Omega_1=\{x,\bar{x}\}$$

となる．一方，補題1より

$$\mathfrak{M}_3=\{f\in\Omega\,;\,f\circ\{x,\bar{x}\}\subseteq\{x,\bar{x}\}\}$$

であるので

$$f\in\mathfrak{M}_3$$

となる．従って，

$$\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_3$$

である．

逆は明らかに成立する．　　　　　　　　（証明終）

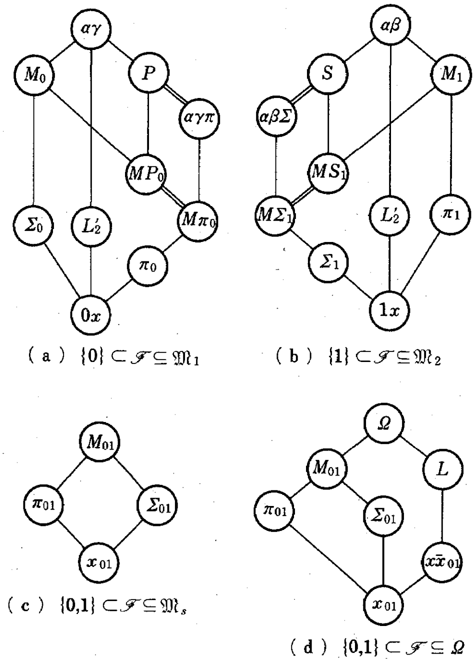
定理2より，次の系が成立する．

〔系1〕 第3種関数族 $\mathscr{F}$ は，第2種関数族か，$\{0,1\}\subset\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_5$ である．

〔系2〕 第4種関数族 $\mathscr{F}$ は，第3種関数族か，$\{0\}\subset\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_1$ である．

〔系3〕 第5種関数族 $\mathscr{F}$ は，第3種関数族か，$\{1\}\subset\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_2$ である．

合成に関して閉じた関数族はKuntzmann(1)により分類されており，その結果と系1，2，3の結果とから各種関数族の包含関係を図示すると図1のようになる．図1(a)が $\bar{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$, $\{0\}\subset\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_1$ を満たす関数族である．図1(b)が $\bar{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$, $\{1\}\subset\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_2$ を満たす関数族である．図1(c)が $\bar{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$, $\{0,1\}\subset\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_5$ を満たす関数族である．従って，第3種関数族は第2種関数族と合せて図1(d)のようになる．第4種関数族は，図1(a)と(d)である．第5種関数族は，図1(b)と(d)である．図1での1重線は単に集合としての包含関係を表し，その間には他の関数族が存在しないことを表している．2重線は，集合としての包含関係のほかに，その間に無数の関数族



(a) $\{0\}\subset\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_1$　(b) $\{1\}\subset\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_2$

(c) $\{0,1\}\subset\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}_s$　(d) $\{0,1\}\subset\mathscr{F}\subseteq\Omega$

図1　変数縮退に関して閉じた関数族
Fig.1−Classes closed under variable degeneration.

が存在することを示している．各関数族の記号の意味は次のようになる．

$\alpha=\{f\ ;f(x,\cdots,x)=x\}$

$\beta=\{f\ ;f(x,\cdots,x)=1\}$

$\gamma=\{f\ ;f(x,\cdots,x)=0\}$

$M=\{0,1$ を除く単調増大関数$\}$

$P=\{f\ ;f=g\cdot h, g\in M\cap\mathfrak{M}_3, h\in\Omega\}$

$S=\{f\ ;f=g\vee h, g\in M\cap\mathfrak{M}_3, h\in\Omega\}$

$\Sigma=\{\overline{x\vee y}\}$

$\Pi=\{\overline{x\cdot y}\}$

$L=\{f$; 線形関数$\}=\mathfrak{M}_4$

$\alpha\gamma=\alpha\cup\gamma=\mathfrak{M}_1$

$\alpha\beta=\alpha\cup\beta=\mathfrak{M}_2$

$M_{01}=\overline{M\cup\{0,1\}}=\mathfrak{M}_5$

$M_0=\overline{M\cup\{0\}}$

$M_1=\overline{M\cup\{1\}}$

$\Sigma_{01}=\overline{\Sigma\cup\{0,1\}}$

$\Sigma_0=\overline{\Sigma\cup\{0\}}$

$\Sigma_1=\overline{\Sigma\cup\{1\}}$

$\Pi_{01}=\overline{\Pi\cup\{0,1\}}$

$\Pi_0=\overline{\Pi\cup\{0\}}$

$\Pi_1=\overline{\Pi\cup\{1\}}$

$MP_0=\{\overline{\mathrm{Maj},0}\}$

$M\Pi_0=\{x\cdot\Pi$（否定を含まない和項）$\}\cup\{0\}$

$\alpha\gamma\Pi=\{x\cdot\Pi$（和項）$\}$

$L_2'=\{\overline{x\oplus y\oplus 1}\}$

$0x=\{\overline{0,x}\}$

$1x=\{\overline{1,x}\}$

$x_{01}=\{\overline{0,1,x}\}$

$x\bar{x}_{01}=\{\overline{0,1,x,\bar{x}}\}=\Omega_1$

$MS_1=\{\overline{\mathrm{Maj},1}\}$

$M\Sigma_1=\{x\vee\Sigma$（否定を含まない積項）$\}\cup\{1\}$

$\alpha\beta\Sigma=\{x\vee\Sigma$（積項）$\}$

$\mathrm{Maj}(x,y,z)=xy\vee yz\vee zx$

4. 故障に関して閉じた関数族

関数族$\mathscr{F}$に属する関数fを実現する回路としては，$\mathscr{F}$に属する関数だけを素子として合成した任意の論理回路を対象とする．例えば，関数 $f\in\mathscr{F}$ を実現する回路としては，$\mathscr{F}$に属する関数 g_1, g_2 を用いて

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$=g_1(g_1(x_1, x_2),\ g_2(x_3, x_4, x_5))$$

と書ける場合，g_1, g_2 を実現する素子 E_1, E_2 を用いて図2のように合成した回路を対象とする．

対象とする故障は，論理回路を合成する素子の入出力線が論理値"0"，"1"に縮退する縮退故障を対象とする．論理回路を構成する素子として，論理値"0"のみに誤る，あるいは"1"のみに誤る非対称な故障確率を有するフェイルセイフ素子を考えることもできる．この場合は，0縮退故障または1縮退故障の一方だけを対象とする．

関数族$\mathscr{F}$に属する任意の関数fと$\mathscr{R}\subseteq\{0,1\}$に対して，$f$を実現する任意の回路の$\mathscr{R}$縮退故障による故障回路が$\mathscr{F}$に属している関数を実現しているならば，$\mathscr{F}$は$\mathscr{R}$縮退故障に関して閉じているという．$\mathscr{F}$の$\mathscr{R}$縮退故障によるすべての故障関数の集合を$\mathscr{F}^{S\mathscr{R}}$と書くこと

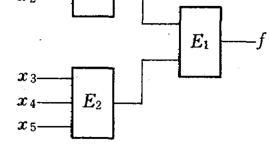


図2　関数fを実現する回路
Fig.2−Circuit realizing function f.

にすれば，$\mathcal{R}$縮退故障に関して閉じているとは

$$\mathcal{F}^{S\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{F}$$

のときをいう．

合成に関して閉じた関数族においては，縮退故障に関して閉じた関数族と，変数縮退に関して閉じた関数族が同値であることが次の定理により示される．

〔定理3〕 $\overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}$，$\mathcal{R}\subseteq\{0,1\}$ に対して

$$\mathcal{F}^{S\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}^{\mathcal{R}}=\mathcal{F}$$

（証明）（必要条件）

$\mathcal{F}^{S\mathcal{R}}\subseteq\mathcal{F}$ より明らかに$\mathcal{F}\supseteq\mathcal{R}$が成立する．従って，定理1より

$$\mathcal{F}^{\mathcal{R}}=\mathcal{F}$$

となる．

（十分条件）

$\mathcal{F}$に属する関数fを実現する回路をCとし，回路内の素子の入出力線 $l_1, l_2, \cdots, l_k$ が各々 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$（$\alpha_i \in \mathcal{R} \subseteq \{0,1\}$）に縮退した故障を$\alpha$とし，故障回路を$C_\alpha$とする．$C_\alpha$により実現される故障関数を$f_\alpha$とする．故障回路$C_\alpha$は，$C$における各線 $l_1, l_2, \cdots, l_k$ を切断し，そこに定数素子 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ をそう入した回路に等価である．しかも$\mathcal{F}\supseteq\mathcal{R}$であるので，これらの定数関数 α_i $(1\leqq i\leqq k)$ はすべて$\mathcal{F}$に属しており，更に$\mathcal{F}$は合成に関して閉じている．従って，$f_\alpha\in\mathcal{F}$ となり$\mathcal{F}$は縮退故障に関して閉じていることが分かる．すなわち

$$\mathcal{F}^{S\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{F}$$

である．（証明終）

第3種関数族$\mathcal{F}$は，$\mathcal{F}\supseteq\{0,1\}$ であるので定理1より$\mathcal{F}^{\{0,1\}}=\mathcal{F}$となる．更に定理3により，$\mathcal{F}^{S\{0,1\}}\subseteq\mathcal{F}$ となり第3種関数族は0縮退故障と1縮退故障に関して閉じている．同様に，第4種関数族は0縮退故障に関して閉じており，第5種関数族は1縮退故障に関して閉じている．

第3種関数族の代表例として，極大関数族の$\mathfrak{M}_4$と$\mathfrak{M}_5$がある．線形関数族$\mathfrak{M}_4$に関しては，線形関数を実現するEOR素子だけから成る論理回路の故障検査はその回路の規模によらず常に4個の検査入力で十分であり，従って故障検査容易であることが示されている[(3)〜(5)]．又，単調増大関数族$\mathfrak{M}_5$に関しては，縮退故障で閉じているため故障検査容易であることが文献(6)〜(9)で示されている．故障関数がやはり単調増大関数であるので，故障検査入力としては正常な単調増大関数を他のすべての単調増大関数と区別する入力集合を求めればよい．これはn次元立方体において，関数fが1の値をとる極小ベクトルと，fが0となる極大ベクトル全体の集合，換言すれば単調性の境界となる入力の集合が検査入力になる[(6)〜(9)]．

単調増大関数族を真に包含するユネイト関数族$\mathcal{U}$も故障検査容易であることが知られているが[(6)]，一般に

$$\overline{\mathcal{U}}\neq\mathcal{U},\ \mathcal{U}^{\mathcal{R}}\neq\mathcal{U},\ \mathcal{U}^{S\mathcal{R}}\not\subseteq\mathcal{U}$$

となり，合成に関しても，変数縮退に関しても，縮退故障に関しても閉じていない．ところが，ユネイト関数族はある種の合成に関しては閉じており，その合成の下では変数縮退に関しても，縮退故障に関しても閉じている．このことを次に示そう．

5. ユネイト関数族

n変数論理関数を$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$とする．変数x_iに対して

$$f(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n) \leqq f(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

ならば，fはx_iに関して正であるといい，逆に

$$f(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n) \geqq f(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

ならば，fはx_iに関して負であるという．

関数fがすべての変数に関して正ならば単調増大関数であり，fがすべての変数に関して負ならば単調減少関数である．又，fがすべての変数に関して正または負であるならばユネイト関数である．

ユネイト関数$f(x_1, \cdots, x_n)$に対して，正の変数x_iはそのまま，負の変数x_jは$x_j^*=\overline{x}_j$とおくことにより変更した関数をf^*とする．

例えば，

$$f(x_1, x_2)=x_1 \vee \overline{x}_2$$

のとき

$$f^*(x_1, x_2^*)=x_1 \vee x_2^*$$

となる．

ユネイト関数fに対応するf^*において，$f^*(\boldsymbol{x})=1$となる入力ベクトル$\boldsymbol{x}$で$f^*(\boldsymbol{y})=1$となる他のどんな入力ベクトル$\boldsymbol{y}$に対しても

$$\boldsymbol{x}\not\geqq\boldsymbol{y}$$

となるならば，この入力ベクトル$\boldsymbol{x}$を極小真ベクトルと呼ぶ．又，$f^*(\boldsymbol{x})=0$となる入力ベクトル$\boldsymbol{x}$で，$f^*(\boldsymbol{y})=0$ となる他のどんな入力ベクトル$\boldsymbol{y}$に対しても

$$\boldsymbol{x}\not\leqq\boldsymbol{y}$$

となるならば，この入力ベクトル$\boldsymbol{x}$を極大偽ベクトルと呼ぶ．

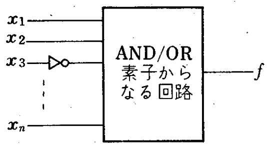


図3　AND−OR回路実現
Fig.3−AND−OR circuit realization.

関数f^*の極小真ベクトル全体の集合をS_0^*，極大偽ベクトル全体の集合をS_1^*で表す．S_0^*, S_1^*の各ベクトルを関数fに対応するベクトルに変換した集合をS_0, S_1と表す．

例えば，ユネイト関数

$$f(x_1, x_2)=x_1 \vee \bar{x}_2$$

を考えれば，

$$f^*(x_1, x_2^*)=x_1 \vee x_2^*$$

であるので，極小真ベクトルは，$(x_1, x_2^*)=(0,1)$と$(1,0)$で，極大偽ベクトルは，$(0,0)$である．従って

$$S_0^*=\{(0,1),\ (1,0)\}$$
$$S_1^*=\{(0,0)\}$$
$$S_0=\{(0,0),\ (1,1)\}$$
$$S_1=\{(0,1)\}$$

となる．この入力ベクトルの集合S_0, S_1を各々，ユネイト関数fの極小真ベクトル集合，極大偽ベクトル集合と呼ぶことにする．

Betancourt[6]によれば，ユネイト関数fを入力側だけ否定素子を許し他はすべてAND素子とOR素子だけから成る任意のAND−OR回路実現（図3参照）を考えれば，先の集合S_0とS_1は，回路内のすべての多重縮退故障を検出する検査入力集合になっている．

又，Reddy[9]は，AND, OR, NOT, NAND, NORから成る回路で，任意の2点を結ぶすべての道における否定の反転数が等しい回路をユネイト素子回路（unate gate network）と呼び，この回路実現でも，先の集合S_0とS_1が検査入力集合になっていることを示している．

以下では，回路を合成する素子をAND, OR, NOT, NAND, NORに限らず，より広いユネイト素子を対象とし，先の結果を含めて，集合S_0とS_1が検査入力集合であることを，縮退故障に関する閉包という概念で明らかにしていこう．

ユネイト関数族$\mathcal{U}$は，一般の合成に関して閉じていない．すなわち，$\overline{\mathcal{U}} \neq \mathcal{U}$であることは既に知られている．又，ユネイト関数族は縮退故障に関して閉じてなく，$\mathcal{U}^{S\mathcal{R}} \not\subseteq \mathcal{U}$である．

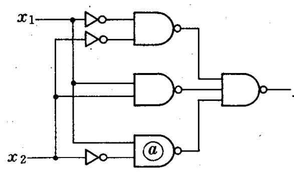


図4　$f=x_1 \vee \bar{x}_2$の回路実現
Fig.4−Circuit realizing $f=x_1 \vee \bar{x}_2$.

例えば，$f(x_1, x_2)=x_1 \vee \bar{x}_2$を図4の回路で実現する．NAND素子の@の出力線が1に縮退する故障α_1を考えると，故障関数は

$$f_{\alpha_1}(x_1, x_2)=\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$$

となり，ユネイト関数でなくなる．実際，この故障α_1は，$x_1=1$，$x_2=0$でしか検査することができず，先に求めた$S_0=\{(0,0),(1,1)\}$や$S_1=\{(0,1)\}$では検査できない．これは，故障によりユネイト関数でなくなったためである．

そこで，縮退故障に関して閉じるような合成法を次に示そう．

$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$と$g(y_1, \cdots, y_j, \cdots, y_m)$をユネイト関数とする．$f$と$g$はユネイト関数であるので各変数は正か負か決まっている．fの変数x_iにgを代入した関数をhとすれば

$$h(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$$
$$=f(x_1, \cdots, g(y_1, \cdots, y_m), \cdots, x_n)$$

と書ける．この関数hにおいて，変数y_j（$1 \leq j \leq m$）の正，負の符号は次のように決まる．

(1)　x_iが正のとき，hにおけるy_jの符号は，gにおけるy_jの符号に等しい．

(2)　x_iが負のとき，hにおけるy_jの符号は，gにおけるy_jの符号の反転である．

例えば，関数fがx_iに関して負で，gがy_jに関して正ならば，hはy_jに関して負になる．

関数の代入後の各変数の符号はこのように決まるので，ユネイト関数の性質を保存するような合成は，異なる符号の変数を合併して一つにするのを禁止したものでなければならない．これを次に示そう．

まず，$f, g_1, g_2, \cdots, g_p$をユネイト関数とする．fに$g_1, g_2, \cdots, g_p$を合成して得られる関数

$$h(x_1, \cdots, x_n)=f(g_1(x_{11}, \cdots, x_{1n_1}),$$
$$\cdots, g_p(x_{p1}, \cdots, x_{pn_p}))$$

において，各変数x_{ij}は$x_1, x_2, \cdots, x_n$から選ぶわけであるが，ここで変数x_{ij}とx_{kl}に同じ変数が選ばれるのは，x_{ij}とx_{kl}がfにおいて同符号のときに限ると

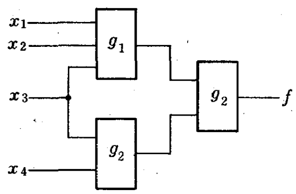


図5　ユネイト合成回路の例
Fig.5－Example of unate composition circuit.

いう制限をおいた合成操作を考える．この合成をユネイト合成と呼ぶことにする．

ユネイト関数 f に $g_1,\cdots,g_p\in\mathcal{G}\subseteq\mathcal{U}$ と恒等関数 x をユネイト合成して得られるすべての関数の集合を

$$f\,\square\,\mathcal{G}$$

と書くことにする．このユネイト合成の下での閉包を $\widetilde{\mathcal{U}}$ とすれば，$\widetilde{\mathcal{U}}$ は

$$\mathcal{U}^{(1)}=\mathcal{U}\,\square\,\{x\}$$
$$\mathcal{U}^{(n)}=\mathcal{U}^{(n-1)}\,\square\,\mathcal{U}^{(1)}$$
$$\widetilde{\mathcal{U}}=\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}^{(n)}$$

で定義される．

ユネイト合成の定義から明らかなように，合成される関数の各変数の符号は一意的に決定されるのでユネイト関数になっている．従って，ユネイト関数族はユネイト合成に関して閉じていることが示される．

〔定理4〕　ユネイト関数族 $\mathcal{U}$ に対して

$$\widetilde{\mathcal{U}}=\mathcal{U}$$

が成立する．

ユネイト合成の下で，変数縮退によるすべての関数の集合を

$\mathcal{R}\subseteq\{0,1\}$ に対して

$$\mathcal{U}_{\mathcal{R}}=\mathcal{U}\,\square\,\mathcal{R}$$

で定義する．$\mathcal{U}_{\mathcal{R}}\supseteq\mathcal{U}$ に注意しよう．

$\mathcal{U}\supset\mathcal{R}$ であるので

$$\mathcal{U}=\widetilde{\mathcal{U}}\supseteq\mathcal{U}\,\square\,\mathcal{U}\supseteq\mathcal{U}\,\square\,\mathcal{R}=\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$$

となり次の定理が成立する．

〔定理5〕　ユネイト関数族 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{R}\subseteq\{0,1\}$ に対して

$$\mathcal{U}_{\mathcal{R}}=\mathcal{U}$$

となる．

ユネイト関数族 $\mathcal{U}$ に属するユネイト関数を素子としてユネイト合成した論理回路をユネイト合成回路と呼ぶことにする．例えば，ユネイト関数

$$g_1(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\vee\overline{x}_3$$
$$g_2(y_1,y_2)=\overline{y}_1\vee\overline{y}_2$$

に対して

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$$
$$=g_2(g_1(x_1,x_2,x_3),\ g_2(x_3,x_4))$$

とユネイト合成した関数 f のユネイト合成回路は図5のようになる．

ユネイト合成においては，関数の代入操作のほかに，同符号の変数 x_i と x_j に限り x_i と x_j を合併して一つの変数にすることができるが，これは回路での合成操作で考えてみると入力 x_i から外部出力に至る道における否定素子の個数の偶奇と x_j のそれと一致するときにだけ x_i と x_j を一つに合併できることを意味している．Reddy[9] のユネイト素子回路はこの条件を満たしているのでユネイト素子回路はユネイト合成の特別な場合であることが分かる．

〔定理6〕　任意のユネイト関数はユネイト合成回路で実現可能である．又，ユネイト合成回路はユネイト関数を実現している．

〔定理7〕　ユネイト合成回路に限定すれば，ユネイト関数族は $\mathcal{R}$ 縮退故障に関して閉じている．但し，$\mathcal{R}\subseteq\{0,1\}$．

（証明）　ユネイト合成回路 C の入出力線 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ が $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ $(\alpha_i\in\mathcal{R})$ に縮退する故障を想定する．故障回路は回路 C の入出力線 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ を切断し，定数関数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ をそう入した回路 C_f に等価である．明らかに C_f を構成する素子はすべてユネイト関数であり任意の2点を結ぶ道の上の否定の反転数は等しいので，C_f もユネイト合成回路である．定理6よりユネイト合成回路はユネイト関数を実現しているので，故障回路もユネイト関数を実現している．従って，$\mathcal{R}$ 縮退故障に関して閉じている．（証明終）

定理7より，ユネイト関数 f を実現する回路はユネイト合成回路である限り，故障しても別なユネイト関数を実現する回路になることが分かる．従って，故障検査入力集合としては n 変数ユネイト関数 f を他の n 変数ユネイト関数と区別する入力ベクトルの集合であれば十分である．これは，ユネイト関数 f の極小真ベクトル全体の集合 S_0 と，極大偽ベクトル全体の集合 S_1 で十分であることが知られているので，$S_0\cup S_1$ は検査入力集合になっている．

〔系4〕　ユネイト合成回路に限定すれば，ユネイト関数の極小真ベクトル全体と極大偽ベクトル全体の集合は検査入力集合である．

6. むすび

本論文では，変数縮退に関して閉じた関数族としてどのようなものがあるかを明らかにした．変数縮退に関して閉じた関数族とは別に，論理回路における縮退故障に関して閉じた関数族を定義し，それらの閉関数族は一致することを示した．変数縮退に関して閉じた関数族の中で極大関数族として線形関数族と単調増大関数族があるが，いずれも故障検査容易であることが報告されている．故障検査容易な関数族として他にユネイト関数族があるが，一般の合成に関して閉じていない．しかし，ある制限をおいたユネイト合成の下では，ユネイト関数族は合成に関して閉じており，変数縮退に関しても，縮退故障に関しても閉じていることを示した．

謝辞　筆者の一人（藤原）が日ごろ御指導頂く広島大学樹下行三教授に厚く謝意を表す．又，御討論頂いた本学笹尾勤博士ならびに本学大学院岡部俊一氏に深謝する．

文　　献

(1) Kuntzmann, J.:"Algebre de Boole", Dunod (1968).

(2) 野崎昭弘："スイッチング理論"，共立出版．

(3) Hayes, J.P.:"On realization of Boolean function requiring a minimal or near-minimal number of tests", IEEE Trans. Comput.,C-20,12,p.1506(Dec.1971).

(4) Breuer, M.A.:"Generation of fault tests for linear logic networks", IEEE Trans. Comput., C-21,1,p.79(Jan.1972).

(5) Seth, S.C. and Kodandapani, K.L.:"Diagnosis of fault in linear tree networks", IEEE Trans. Comput.,C-26,1,p.29(Jan.1977).

(6) Betancourt, R.:"Derivation of minimum test sets for unate logical circuits", IEEE Trans. Comput.,C-20,11,p.1264(Nov.1971).

(7) Dandapani, R.:"Derivation of minimal test sets for monotonic logic circuits", IEEE Trans. Comput.,C-22,7,p.657(July 1973).

(8) Akers, S.B. Jr.:"Universal test sets for logic networks", IEEE Trans. Comput.,C-22,9,p.835(Sept.1973).

(9) Reddy, S.M.:"Complete test sets for logic functions", IEEE Trans. Comput.,C-22,11, p.1016(Nov.1973).

(10) 藤原，岡部，尾崎："変数縮退に関する閉論理関数族の分類"，信学技報，EC79-17(1979-09).

（昭和54年9月19日受付）